

ANNALES
DE LA
SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

ASSOCIATION SANS BUT LUCRATIF

TOME CINQUANTE-SEPTIÈME, 1937

SÉRIE I

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES

TROISIÈME ET DERNIER FASCICULE

31 DÉCEMBRE 1937



Publié avec le concours de la Fondation universitaire de Belgique

LOUVAIN

Secrétariat de la Société Scientifique

2, RUE DU MANÈGE, 2

Chèques postaux 2027-46 Chèques postaux Paris n° 110002

1937

Publication trimestrielle. Prix de ce fascicule séparé : 15 frs

TABLE DES MATIÈRES

PAGES

Session du 28 octobre 1937, à Louvain.

PREMIÈRE SECTION : Mathématiques.	141
Sur une solution particulière de l'équation $\Delta_3 U = 0$, par M. P. Humbert	142
Sur la géométrie du triangle et du tétraèdre, par M. V. Thébault	145
Tétraèdres et sphères de Robertis, par M. P. Delens	155
Sur l'interprétation d'Eddington de l'équation de Dirac, par M. G. Lemaître	165
Théorie du mouvement gyroscopique des projectiles. Le mouvement gyroscopique élémentaire. Essai d'interprétation physique, par M. R. d'Adhémar	175
Les observations d'équinoxes et de solstices dans le chapitre 1 du livre 3 du Commentaire sur l'Almageste par Théon d'Alexandrie. 1 ^{re} partie, par M. A. Rome	213
DEUXIÈME SECTION : Physique et Chimie	237
Désintégration et radioactivation artificielles, par M. G. Guében	238
Sur la dépolarisation de la lumière transmise par les solutions colloïdales, par MM. A. Boutaric et L. Bernard	284
Le dosage spectrographique du niobium et du tantale, par MM. R. Breckpot et J. Creffier	290
Étude spectrographique d'alliages ternaires à base de plomb, par MM. R. Breckpot, J. Creffier et O. Perlinghi	295
Effets de polarité dans l'arc électrique, par MM. R. Breckpot et C. Weyn	306
Table des Matières	318

Les ANNALES de la Société scientifique de Bruxelles ont paru depuis 1927 en quatre séries distinctes, plus un fascicule administratif.

Série A. Sciences mathématiques (1^{re} section)

Série B. Sciences physiques et naturelles (2^e et 3^e sections).

Série C. Sciences médicales (4^e section).

Série D. Sciences économiques (5^e section).

Les comptes rendus des assemblées générales se trouvent dans le fascicule administratif, qui paraît après la session de Pâques.

Les ANNALES sont divisées d'une nouvelle manière à partir de 1937 :

Série I. Sciences mathématiques et physiques (1^{re}, 2^e et 6^e sections).

Série II. Sciences naturelles et médicales (3^e et 4^e sections).

Série III. Sciences économiques (5^e section).

Fascicule administratif.

La cotisation annuelle des membres (20 belgas) leur donne droit à l'ensemble de ces publications. Toutefois les membres peuvent renoncer, avant la fin de janvier de chaque année, à une ou deux séries et obtenir une ristourne de dix ou vingt francs sur la cotisation.

Le prix de l'ABONNEMENT aux ANNALES pour des personnes ne faisant pas partie de la Société scientifique est fixé par le tarif suivant :

	Périodicité	en Belgique	en France	dans les autres pays
Série I	trimestrielle	35 fr.	9 belgas	12 belgas
Série II	"	35 fr.	9 belgas	12 belgas
Série III	"	50 fr.	11 belgas	12 belgas
Toutes les séries		110 fr	28 belgas	35 belgas

SESSION DU 28 OCTOBRE 1937

A LOUVAIN

Première Section

Sciences Mathématiques

Présidence de M. F. Simonart.

M. P. Humbert présente une note sur *Une solution de l'équation $\Delta_3 U = 0$* .

M. V. Thébault présente une note sur *La géométrie du triangle et du tétraèdre*.

M. V. Thébault présente une note de M. P. Delens, intitulée : *Tétraèdres et sphères de Roberts*.

M. le Vicomte R. d'Adhémar présente la suite d'un mémoire intitulé : *Théorie du mouvement gyroscopique des projectiles. Le mouvement gyroscopique élémentaire. Essai d'interprétation physique*.

M. A. Rome présente une étude sur *Les observations d'équinoxes et de solstices d'après Théon d'Alexandrie, l. 3, chap. 1*.

M. G. Lemaitre présente une note sur *L'interprétation d'Eddington de l'équation de Dirac*.

Ces travaux paraîtront dans les *Annales*.

SUR UNE SOLUTION PARTICULIÈRE DE L'ÉQUATION $\Delta_3 U = 0$

par M. PIERRE HUMBERT

L'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad \Delta_3 U = \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial z^3} - 3 \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y \partial z} = 0$$

admet, on le sait, la solution générale

$$U = F(u, v) + G(v, w) + H(w, u)$$

où

$$\begin{aligned} u &= x + y + z \\ v &= x + jy + j^2 z \\ w &= x + j^2 y + jz \end{aligned} \quad (j^3 = 1)$$

Mais il est intéressant d'en chercher des solutions particulières, correspondant à des changements de variables spéciaux. J'en ai donné plusieurs exemples dans divers travaux ⁽¹⁾. En voici un autre, qui conduit à des remarques géométriques assez curieuses.

Commençons par considérer l'équation de Laplace à deux variables, dont (1) est la généralisation directe.

$$(2) \quad \Delta_2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2},$$

et soit le changement de variable,

$$\rho = \lambda^2 e^w, \quad \rho = \mu^2 e^{-w},$$

où ρ et w sont les variables polaires, λ et μ les nouvelles variables. Les courbes coordonnées $\lambda = \text{const.}$ et $\mu = \text{const.}$ sont des spirales logarithmiques, orthogonales. On trouvera aisément des solutions de l'équation en remarquant que, si l'on pose

$$u = x + iy, \quad v = x - iy,$$

on a

$$\begin{aligned} u &= \lambda^{1-i} \mu^{1+i} \\ v &= \lambda^{1+i} \mu^{1-i}. \end{aligned}$$

⁽¹⁾ P. HUMBERT. Sur une généralisation de l'équation de Laplace (*Journal Math. pures appl.*, série 9, t. VIII, 1929). — Solutions nouvelles de l'équation $\Delta_3 U = 0$ (*Mathematica*, vol. XI, 1935).

Or, sont solutions de (2) les quantités telles que

$$u^{k(1-i)}, \quad u^{k(1+i)}, \quad v^{k(1-i)}, \quad v^{k(1+i)},$$

c'est-à-dire

$$\lambda^{2k} \mu^{2ik}, \quad \lambda^{2k} \mu^{-2ik}, \quad \lambda^{2ik} \mu^{2k}, \quad \lambda^{-2ik} \mu^{2k},$$

ou des combinaisons linéaires de ces quantités, par exemple

$$\lambda^{2k} \mu^{\frac{2ik}{2} + \frac{\mu^{-2ik}}{2}} = \lambda^{2k} \cos(2k \log \mu).$$

On voit ainsi que, d'une façon plus générale, on peut obtenir des solutions de la forme

$$\frac{\text{ch}}{\text{sh}}(k \log \lambda) \frac{\cos}{\sin}(k \log \mu).$$

Reprenons alors l'équation $\Delta_3 U = 0$, et cherchons des solutions d'un type analogue au précédent. Prenons d'abord le changement de variables qui correspond aux coordonnées polaires, c'est-à-dire

$$x = \rho P(\theta, \varphi)$$

$$y = \rho Q(\theta, \varphi)$$

$$z = \rho R(\theta, \varphi)$$

où P, Q, R sont les cosinus d'Appell,

$$P = \frac{e^{-\theta - \varphi} + e^{-j\theta - j^2\varphi} + e^{-j^2\theta - j\varphi}}{3},$$

$$Q = \frac{e^{-\theta - \varphi} + j e^{-j\theta - j^2\varphi} + j^2 e^{-j^2\theta - j\varphi}}{3},$$

$$R = \frac{e^{-\theta - \varphi} + j^2 e^{-j\theta - j^2\varphi} + j e^{-j^2\theta - j\varphi}}{3}.$$

Puis introduisons les trois nouvelles variables λ, μ, ν , par

$$\rho = \lambda^3 e^{\theta + j\varphi}, \quad \rho = \mu^3 e^{j\theta + \varphi}, \quad \rho = \nu^3 e^{j^2\theta + j^2\varphi},$$

ce qui donne

$$u = \lambda^{1-j} \mu^{1-j} \nu^{j-j^2}$$

$$v = \lambda^{j-j^2} \mu^{1-j} \nu^{1-j}$$

$$w = \lambda^{1-j} \mu^{j-j^2} \nu^{1-j}.$$

On en déduit que sont solutions de l'équation les quantités

$$\lambda^{3k} \mu^{3k} \nu^{3k}, \quad \lambda^{3k} \mu^{3k} \nu^{3jk}, \quad \lambda^{3k} \mu^{3k} \nu^{3j^2k},$$

et les analogues, ainsi que des combinaisons linéaires telles que

$$\lambda^{3k} \mu^{3k} \frac{\nu^{3k} + \nu^{3jk} + \nu^{3j^2k}}{3}.$$

Il est alors indiqué d'introduire les sinus du troisième ordre,

$$f_1(x) = \frac{e^x + e^{jx} + e^{j^2x}}{3},$$

$$f_2(x) = \frac{e^x + j e^{jx} + j^2 e^{j^2x}}{3},$$

$$f_3(x) = \frac{e^x + j^2 e^{jx} + j e^{j^2x}}{3},$$

ce qui donne la fonction

$$\lambda^{3k} \mu^{3k} f_1(3k \log \nu),$$

et, d'une façon générale, la solution

$$\begin{array}{ccc} f_1 & f_1 & f_1 \\ f_2 & (k \log \lambda) & f_2 & (k \log \mu) & f_2 & (k \log \nu) \\ f_3 & f_3 & f_3 \end{array}$$

correspondant à celle que nous avons écrite plus haut pour l'équation de Laplace.

Il est surtout intéressant de rechercher si les surfaces coordonnées $\lambda = \text{const.}$, etc., jouissent de propriétés généralisant celles des spirales logarithmiques du plan. Il faut évidemment se transporter, non pas dans l'espace ordinaire, mais dans l'espace attaché à l'opérateur Δ_3 , où la

distance d'un point à l'origine est $\rho = (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)^{\frac{1}{3}}$. Une étude approfondie de cet espace ayant été faite il y a quelques années par M. Devisme ⁽¹⁾, je lui ai posé la question, et il a donné la réponse dans une note ⁽²⁾ présentée au Congrès des Sociétés savantes de 1937. Dans cet espace, une direction est définie par deux « angles », θ et φ , dont on peut calculer les trois cosinus d'Appell, ou mieux les deux quantités $P(\theta, \varphi)$ et $P(-\theta, -\varphi)$, étant rappelé que l'on a

$$P(-\theta, -\varphi) = P^2(\theta, \varphi) - Q(\theta, \varphi) R(\theta, \varphi)$$

$$P^3 + Q^3 + R^3 - 3PQR = 1.$$

Par ailleurs, étant donnée une surface, on définira aisément une direction généralisant la notion de normale ordinaire. Or, M. Devisme trouve que l'angle de la normale avec le rayon vecteur de la surface

$$\rho = C e^{\alpha\theta + \beta\varphi}$$

⁽¹⁾ J. DEVISME, Sur l'équation de M. Pierre Humbert, Thèse de Doctorat. Toulouse. 1933.

⁽²⁾ Sur les surfaces $\rho = C e^{\alpha\theta + \beta\varphi}$ de l'espace attaché à l'équation de M. Pierre Humbert.

est constant, et donné par

$$P(\theta, \varphi) = \frac{1}{(1 - \alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta)^{\frac{1}{3}}}$$

$$P(-\theta, -\varphi) = \frac{1 - \alpha\beta}{(1 - \alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta)^{\frac{2}{3}}}$$

On a donc ainsi une généralisation immédiate des spirales logarithmiques, dans l'espace considéré. D'ailleurs, pour les spirales étudiées au début, on a, pour l'angle de la tangente avec le rayon vecteur, $\frac{\sin \omega}{\cos \omega} = -1$, et, dans le cas présent, on trouve $\frac{Q}{P} = -1$, ce qui rend l'analogie encore plus nette.

SUR LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE ET DU TÉTRAÈDRE

par M. V. THÉBAULT, Le Mans (France)

I. POINTS REMARQUABLES DU TRIANGLE ET DU TÉTRAÈDRE

1. Soient a, b, c les longueurs des côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC ; (A_1, B_1, C_1) , (A', B', C') et (D, E, F) , (D_a, E_a, F_a) , ..., les milieux des côtés, les pieds des hauteurs et les points où les cercles tritangents touchent les côtés ; (O) , (O_e) et (I) , (I_a) , (I_b) , (I_c) le cercle circonscrit, le cercle d'EULER et les cercles tritangents ; R , $\frac{R}{2}$, r , r_a , r_b , r_c les rayons de ces cercles ; h_a, h_b, h_c , les longueurs des hauteurs AA', BB', CC' ; S l'aire du triangle ; θ l'angle de BROCARD.

Pour fixer les idées, nous supposons que les angles du triangle sont tous aigus, les autres cas conduisant d'ailleurs à des résultats analogues.

2. Les cercles décrits des sommets A, B, C du triangle ABC, comme centres, avec

$$AE = AF = p - a, \quad BD = BF = p - b, \quad CD = CE = p - c$$

pour rayons, sont tangents deux à deux aux points D, E, F, et il existe deux cercles (ω_1) et (ω_2) , de centres ω_1 et ω_2 , tangents intérieurement et extérieurement à ces trois cercles.

Les inverses des rayons ρ_1 et ρ_2 des cercles (ω_1) et (ω_2) ont pour expressions, d'après une formule connue,

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} - \frac{2}{r} = \frac{1}{S} (4R + r - 2p) \quad (1)$$

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} + \frac{2}{r} = \frac{1}{S} (4R + r + 2p); \quad (1) \quad (2)$$

de sorte que l'on a

$$(3) \quad \rho_1 = \left| \frac{S}{4R + r - 2p} \right|, \quad \rho_2 = \left| \frac{S}{4R + r + 2p} \right|, \quad (4)$$

les signes de ces rayons étant contraires puisque le cercle (ω_1, ρ_1) contient tous les cercles $(A, p-a)$, $(B, p-b)$, $(C, p-c)$ et que le cercle (ω_2, ρ_2) est extérieur à ces cercles. Les cercles (ω_1) et (ω_2) se correspondent d'ailleurs dans une inversion (I, r^2) et leurs points de contact α_1 et α_2 , β_1 et β_2 , γ_1 et γ_2 avec les cercles $(A, p-a)$, $(B, p-b)$, $(C, p-c)$ sont alignés sur le centre I du cercle inscrit au triangle fondamental.

Si l'on trace des sommets A, B, C du triangle ABC , comme centres, avec $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ pour rayons, les cercles (A, a) , (B, b) , (C, c) , les droites $(\alpha_1 \omega_1, \beta_1 \omega_1, \gamma_1 \omega_1)$ et $(\alpha_2 \omega_2, \beta_2 \omega_2, \gamma_2 \omega_2)$ rencontrent ces cercles en des points $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ et $(\alpha_4, \beta_4, \gamma_4)$ tels que l'on a

$$\alpha_1 \alpha_3 = \alpha_1 A + A \alpha_3 = p - a + a = p = \beta_1 \beta_3 = \gamma_1 \gamma_3 \quad (5)$$

et

$$\alpha_2 \alpha_4 = \alpha_2 A + A \alpha_4 = p - a + a = p = \beta_2 \beta_4 = \gamma_2 \gamma_4; \quad (6)$$

de sorte que

$$\omega_1 \alpha_3 = \alpha_1 \alpha_3 - \alpha_1 \omega_1 = p - \rho_1 = \omega_1 \beta_3 = \omega_1 \gamma_3 \quad (7)$$

et

$$\omega_2 \alpha_4 = \alpha_2 \alpha_4 - \alpha_2 \omega_2 = p - \rho_2 = \omega_2 \beta_4 = \omega_2 \gamma_4. \quad (8)$$

Il en résulte donc que les cercles circonscrits aux triangles $\alpha_3 \beta_3 \gamma_3$ et $\alpha_4 \beta_4 \gamma_4$ sont tangents aux trois cercles (A, a) , (B, b) , (C, c) et sont concentriques aux cercles (ω_1, ρ_1) et (ω_2, ρ_2) .

Les rayons $\omega_1 \alpha_3 = R_1$ et $\omega_2 \alpha_4 = R_2$ de ces cercles ont pour expressions, en vertu de (3), (4), (7) et (8),

$$R_1 = |p - \rho_1| = 2p \cdot \left| \frac{2R + r - p}{4R + r - 2p} \right|, \quad (9)$$

$$R_2 = |p + \rho_2| = 2p \cdot \left| \frac{2R + r + p}{4R + r + 2p} \right|. \quad (10)$$

(1) Les inverses des rayons ρ_1 et ρ_2 de deux cercles tangents à trois cercles, de rayons α, β, γ tangents deux à deux, sont

$$\frac{1}{\rho_1} = \left\{ \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \pm \sqrt{\frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma}} \right\}.$$

Si $\alpha = p - a$, $\beta = p - b$, $\gamma = p - c$, $(\alpha + \beta + \gamma) : \alpha\beta\gamma = 1 : r^2$.

Observons que

$$\begin{aligned} B\omega_1 + \omega_1 C + CB &= b - R_1 + c - R_1 + a = 2(p - R_1) = \\ &C\omega_1 + \omega_1 A + AC = A\omega_1 + \omega_1 B + BA \end{aligned} \quad (11)$$

et que

$$\begin{aligned} B\omega_2 + \omega_2 C - CB &= R_2 + p - b + R_2 + p - c - a = 2R_2 = \\ &C\omega_2 + \omega_2 A - AC = A\omega_2 + \omega_2 B - BA. \end{aligned} \quad (12)$$

Il en résulte que, dans le plan d'un triangle ABC, le point ω_1 est tel qu'en le joignant aux trois sommets, les triangles $\omega_1 BC$, $\omega_1 CA$, $\omega_1 AB$ ont le même périmètre. Les triangles $\omega_2 BC$, $\omega_2 CA$, $\omega_2 AB$ sont tels que

$$p' - a = p'' - b = p''' - c,$$

p' , p'' , p''' étant les demi-périmètres de ces triangles.

En outre, si on pose

$$A\omega_1 = x_1, B\omega_1 = y_1, C\omega_1 = z_1; \quad A\omega_2 = x_2, B\omega_2 = y_2, C\omega_2 = z_2,$$

ω_1 et ω_2 sont les points du plan du triangle ABC qui satisfont aux relations

$$a - x_1 = b - y_1 = c - z_1 = R_1, \quad (13)$$

et

$$a + x_2 = b + y_2 = c + z_2 \quad (1) = p + R_2 \quad (14)$$

qui peuvent se mettre sous les formes

$$x_1 - y_1 = a - b, \quad x_1 - z_1 = a - c, \quad y_1 - z_1 = b - c \quad (15)$$

et

$$x_2 - y_2 = b - a, \quad x_2 - z_2 = c - a, \quad y_2 - z_2 = c - b, \quad (16)$$

indiquant ainsi que les hyperboles qui ont pour foyers deux des sommets du triangle et qui passent par le troisième sommet, se coupent aux points ω_1 et ω_2 ⁽²⁾.

Les points de contact des cercles (A, a), (B, b), (C, c) avec les cercles (ω_1 , R_1) et (ω_2 , R_2) étant de nature différente, ces deux cercles se correspondent dans une inversion (H' et ρ^2), H' et ρ étant le centre et le rayon du cercle orthogonal aux trois cercles (A, a), (B, b), (C, c), (cercle de LONGCHAMPS du triangle ABC). Le point H' est d'ailleurs symétrique de l'orthocentre H, par rapport au centre O du cercle circonscrit au triangle fondamental.

Les points ω_1 et ω_2 sont donc collinéaires avec des centres radicaux I et H' des triples de cercles (A, $p - a$), (B, $p - b$), (C, $p - c$) et (A, a), (B, b), (C, c).

(1) M. R. BOUVAIST nous a signalé récemment les égalités (14) concernant un point remarquable du triangle. (V. T.).

(2) Des propriétés de ces coniques ont été données dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* de G. DE LONGCHAMPS, 1886-236.

Toutes les propriétés démontrées pour les cercles de centres A, B, C, tangents deux à deux aux points D, E, F, s'appliquent aisément aux cercles de mêmes centres tangents entre eux aux points (D_a, E_a, F_a). On a donc la proposition suivante : Soient (ω_{1i}) et (ω_{2i}) les deux cercles tangents aux trois cercles qui se touchent deux à deux en trois des points de contact des cercles tritangents avec les côtés d'un triangle ABC. Les quatre droites $\omega_{1i}\omega_{2i}$ ainsi obtenues passent chacune par un des centres des cercles tritangents et concourent au symétrique de l'orthocentre, par rapport au centre du cercle circonscrit au triangle fondamental, (centre du cercle DE LONGCHAMPS). Le centre I_i du cercle tritangent correspondant et le point H' coïncident avec l'un des centres de similitude des cercles (ω_{2i} , ρ_{2i}) et (ω_{2i} , R_{2i}), (ω_{1i} , ρ_{1i}) et (ω_{1i} , R_{1i}).

Remarques. — 1° Les axes de similitude des trois cercles (A, a), (B, b), (C, c) sont parallèles à l'un des axes de similitude des triples de cercles [(A, p - a), (B, p - b), (C, p - c)], ...

2° Lorsque le triangle ABC est rectangle en A, $p = 2R + r$ et les formules (3) et (4) se réduisent aux suivantes :

$$\rho_1 = S : -r = -p = -r_a \quad \text{et} \quad R_1 = 0;$$

de sorte que, dans un triangle rectangle ABC, les cercles (A, a), (B, b), (C, c) concourent, sur le cercle circonscrit, en un point ω_1 qui est le centre d'un cercle ($\omega_1, -r_a$) tangent intérieurement aux cercles (A, r), (B, r_c), (C, r_b) qui se touchent deux à deux aux points de contact D, E, F du cercle inscrit sur les côtés du triangle fondamental.

3° Dans le triangle spécial où $p = 2R$, on a

$$\rho_1 = p \quad \text{et} \quad R_1 = 2p = 2\rho_1. \quad (1)$$

4° On sait que dans un triangle ABC où $\cot \theta = 2$ (°), (qui est toujours

(1) Voici d'autres relations concernant ce triangle particulier,

$$bc + ca + ab = (2R + r)^2; \quad \Sigma a \cdot (OB_1 + OC_1) = 4R^2 = r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b;$$

$$IH^2 = r(4R + 3r); \quad \sqrt[4]{r r_a r_b r_c} = 2R, \quad S = 2Rr;$$

$$\sin A + \sin B + \sin C = 2 = (1 \cos A)(1 \cos B)(1 \cos C);$$

$$\sin A \sin B \sin C = \frac{r}{R}, \quad \Sigma \sin B \sin C = \Sigma \cos B \cos C = \left(\frac{r}{2R}\right)^2;$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{2R} = 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}; \quad \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{1}{2};$$

$$r_a = 2R \operatorname{tg} \frac{A}{2}, \quad r_b = 2R \operatorname{tg} \frac{B}{2}, \quad r_c = 2R \operatorname{tg} \frac{C}{2}, \quad r = \frac{1}{2} h_a \sin A. \quad (\text{V. T.}).$$

(°) Ce triangle possède des propriétés très curieuses. — Cf. V. THÉBAULT, *Mathesis*, 1924-94, 1931-192 et 284, 1934. (Supplément, p. 28), 1936-271. — *Annales de la Société scientifique*, 1934-94. — *L'Enseignement mathématique*, (Genève), 1935-324.

acutangle), le périmètre du triangle orthique A'B'C' est égal à la somme des rayons de ses cercles exinscrits : de sorte que l'on a, avec les mêmes notations que celles du triangle ABC, mais souvent *accentuées*,

$$2p' = r'_a + r'_b + r'_c = 4 \cdot \frac{R}{2} + r' = 2R + r'.$$

Si l'on prend le triangle A'B'C' pour triangle de référence, où $\rho'_1, \rho'_2, R'_1, R'_2$ sont des notations ayant la même signification que ρ_1, ρ_2, R_1, R_2 dans un triangle acutangle quelconque, on a

$$2R + r' - 2p' = 0, \quad 2R + r' + 2p' = 4p'.$$

Donc, le cercle (ω'_1) tangent intérieurement aux cercles $(A', p' - a')$, $(B, p' - b')$, $(C, p' - c')$ dégénère en une droite Δ' perpendiculaire à la droite AH'' joignant le centre H du cercle inscrit au triangle A'B'C' au symétrique H'' de l'orthocentre de ce triangle, par rapport au centre O_0 du cercle d'EULER du triangle ABC.

Le cercle (ω_1, R_1) dégénère également en une droite Δ'_1 parallèle à Δ' . Les droites Δ' et Δ'_1 étant les transformées des cercles (ω'_2, ρ'_2) et (ω'_2, R'_2) dans les inversions (H, r'^2) et (H'', ρ'^2) , les cercles (ω'_2, ρ'_2) et (ω'_2, R'_2) passent respectivement par le centre H du cercle inscrit et par le centre H'' du cercle DE LONGCHAMPS du triangle A'B'C'.

Dans la figure qui nous occupe, on a encore

$$\rho'_2 = \frac{S'}{2(2R + r')}, \quad R'_2 = R + \frac{3}{4} r'.$$

3. Soit ABCD un tétraèdre dont les arêtes $BC = a$, $DA = a'$, $CA = b$, $DB = b'$, $AB = c$, $DC = c'$ sont tangentes à une sphère (I), de rayon r ⁽¹⁾, en des points M, M', N, N', P, P' que nous supposons tous intérieurs aux segments rectilignes BC, BA, CA, DB, AB, DC. Les points M, M', N, N', P, P' appartiennent alors trois par trois à des sphères (A), (B), (C), (D) tangentes entre elles deux à deux, ayant pour centres les sommets A, B, C, D du tétraèdre et dont nous désignerons les rayons par

$$\begin{aligned} \rho_a &= \frac{1}{2} (b + c - a) = \frac{1}{2} (a' + b - c') = \frac{1}{2} (a' - b' + c) \\ \rho_b &= \frac{1}{2} (c + a - b) = \frac{1}{2} (a + b' - c') = \frac{1}{2} (b' + c - a') \\ \rho_c &= \frac{1}{2} (a + b - c) = \frac{1}{2} (a - b' + c') = \frac{1}{2} (b + c' - a') \\ \rho_d &= \frac{1}{2} (b' + c' - a) = \frac{1}{2} (c' + a' - b) = \frac{1}{2} (a' + b' - c), \end{aligned} \tag{17}$$

(1) Les sommes, ou les différences, des couples d'arêtes opposées sont alors égales.

car les points M, M', N, N', P, P' sont aussi, dans les faces du tétraèdre, les points de contact des arêtes avec les cercles inscrits à ces faces.

Deux sphères (ω_1) et (ω_2), de centres ω_1 et ω_2 et de rayons ρ_1 et ρ_2 , touchent intérieurement et extérieurement les quatre sphères (A, ρ_a), (B, ρ_b), (C, ρ_c), (D, ρ_d). Si l'on pose

$$\bar{\omega}^2 = -\left(\frac{1}{\rho_a^2} + \frac{1}{\rho_b^2} + \frac{1}{\rho_c^2} + \frac{1}{\rho_d^2}\right) + 2\left(\frac{1}{\rho_a\rho_b} + \frac{1}{\rho_a\rho_c} + \frac{1}{\rho_a\rho_d} + \frac{1}{\rho_b\rho_c} + \frac{1}{\rho_b\rho_d} + \frac{1}{\rho_c\rho_d}\right),$$

on sait que ⁽¹⁾

$$\frac{2}{\rho_1} = \bar{\omega} \sqrt{3} - \left(\frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c} + \frac{1}{\rho_d}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{r} - \left(\frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c} + \frac{1}{\rho_d}\right) \quad (18)$$

$$\frac{2}{\rho_2} = \bar{\omega} \sqrt{3} + \left(\frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c} + \frac{1}{\rho_d}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{r} + \left(\frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c} + \frac{1}{\rho_d}\right). \quad (19)$$

Les sphères (ω_1 , ρ_1) et (ω_2 , ρ_2) se correspondent dans une inversion (I, r^2) et leurs points de contact α_1 et α_2 , β_1 et β_2 , γ_1 et γ_2 , δ_1 et δ_2 avec les sphères (A, ρ_a), (B, ρ_b), (C, ρ_c), (D, ρ_d) sont collinéaires avec le centre I de la sphère tangente aux arêtes du tétraèdre fondamental.

Soient $a + a' = b + b' = c + c' = 2s$;

$$a + b + c = \frac{2p}{D}, \quad a + b' + c' = \frac{2p}{A}, \quad b + c' + a' = \frac{2p}{B}, \quad c + a' + b' = \frac{2p}{C}.$$

Si l'on trace des sommets A, B, C, D du tétraèdre ABCD comme centres, avec les demi-périmètres $\frac{p}{A}$, $\frac{p}{B}$, $\frac{p}{C}$, $\frac{p}{D}$ des faces opposées pour rayons, les sphères (A, $\frac{p}{A}$), (B, $\frac{p}{B}$), (C, $\frac{p}{C}$), (D, $\frac{p}{D}$), les droites $\alpha_1\omega_1$, $\beta_1\omega_1$, $\gamma_1\omega_1$, $\delta_1\omega_1$ et $\alpha_2\omega_2$, $\beta_2\omega_2$, $\gamma_2\omega_2$, $\delta_2\omega_2$ percent ces sphères en des points (α_3 , β_3 , γ_3 , δ_3) et (α_4 , β_4 , γ_4 , δ_4) tels que l'on a

$$\begin{aligned} \alpha_1\alpha_3 = \alpha_1A + A\alpha_3 &= \frac{1}{2}(b' + c' - a) + \frac{1}{2}(a + b + c) \\ &= 2s = \beta_1\beta_3 = \gamma_1\gamma_3 = \delta_1\delta_3. \end{aligned} \quad (20)$$

et, par analogie,

$$\alpha_2\alpha_4 = \beta_2\beta_4 = \gamma_2\gamma_4 = \delta_2\delta_4 = 2s; \quad (21)$$

de sorte que

$$\omega_1\alpha_3 = \alpha_1\alpha_3 - \alpha_1\omega_1 = 2s - \rho_1 = \omega_1\beta_3 = \omega_1\gamma_3 = \omega_1\delta_3, \quad (22)$$

$$\omega_2\alpha_4 = \alpha_2\alpha_4 + \alpha_2\omega_2 = 2s + \rho_2 = \omega_2\beta_4 = \omega_2\gamma_4 = \omega_2\delta_4. \quad (23)$$

Donc, les sphères circonscrits aux tétraèdres $\alpha_3\beta_3\gamma_3\delta_3$ et $\alpha_4\beta_4\gamma_4\delta_4$ sont tangentes aux quatre sphères (A, $\frac{p}{A}$), (B, $\frac{p}{B}$), (C, $\frac{p}{C}$), (D, $\frac{p}{D}$) et sont concentriques aux sphères (ω_1 , ρ_1) et (ω_2 , ρ_2).

(1) Cfr. R. GOORMAGHTIGH et V. THÉBAULT, *Mathesis*, 1936-7.

Les expressions des rayons $R_1 = 2s - \rho_1$ et $R_2 = 2s + \rho_2$ de ces sphères de centres ω_1 et ω_2 découlent du reste des relations (18) et (19).

Posons

$$\omega_1 A = x_1, \omega_1 B = y_1, \omega_1 C = z_1, \omega_1 D = t_1 \text{ et } \omega_2 A = x_2, \omega_2 B = y_2, \omega_2 C = z_2, \omega_2 D = t_2.$$

Observant que l'on a

$$\begin{aligned} \omega_1 B + \omega_1 C + \omega_1 D + \frac{1}{2}(BC + DC + DB) &= \frac{1}{2}(a' + b + c') - R_1 + \frac{1}{2}(a' + b' + c) - R_1 \\ &+ \frac{1}{2}(a + b + c) - R_1 + \frac{1}{2}(a + b' + c') = a + a' + b + b' + c + c' - 3R_1 = 3(2s - R_1), \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \omega_2 B + \omega_2 C + \omega_2 D - \frac{1}{2}(BC + CD + DB) &= \frac{1}{2}(a + b' - c') + R_2 + \frac{1}{2}(a + c' - b') - R_2 \\ &+ \frac{1}{2}(b' + c' - a) + R_2 - \frac{1}{2}(a + b' + c') = 3R_2, \end{aligned}$$

et des relations analogues pour $[\omega_1 C + \omega_1 D + \omega_1 A - \frac{1}{2}(CA + DA + DC)], \dots,$

et $[\omega_2 C + \omega_2 D + \omega_2 A - \frac{1}{2}(CA + DA + DC)], \dots$, déduites des premières par des permutations circulaires convenables, on obtient les égalités

$$p_A - x_1 = p_B - y_1 = p_C - z_1 = p_D - t_1 = R_1$$

et

$$p_A + x_2 = p_B + y_2 = p_C + z_2 = p_D + t_2 = 2s + R_2,$$

qui expriment, pour le tétraèdre qui nous occupe, des propriétés présentant de l'analogie avec celles que nous avons rencontrées dans le triangle, (13) et (14).

Les sphères (ω_1, R_1) et (ω_2, R_2) se correspondent dans une inversion (Ω, ρ^2) , Ω et ρ désignant le centre radical et le rayon de la sphère orthogonale aux sphères (A, p_A) , (B, p_B) , (C, p_C) , (D, p_D) . Les points $I, \omega_1, \omega_2, \Omega$ sont donc collinéaires et les points I, Ω coïncident avec l'un des centres de similitude des sphères (ω_2, ρ_2) et (ω_1, ρ_1) , (ω_1, R_1) et (ω_2, R_2) .

Remarques. — 1° L'un des plans de similitude des quatre sphères (A, p_A) , (B, p_B) , (C, p_C) , (D, p_D) est parallèle à l'un des plans de similitude des quatre sphères (A, ρ_A) , (B, ρ_B) , (C, ρ_C) , (D, ρ_D) .

2° Dans un tétraèdre ABCD circonscrit à une sphère par les arêtes, si l'on a

$$\frac{2\sqrt{3}}{r} = \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c} + \frac{1}{\rho_d},$$

les sphères (ω_1, ρ_1) et (ω_1, R_1) dégénèrent en deux plans parallèles tangents aux quatre sphères $(A, \rho_a), \dots$, et aux quatre sphères $(A, \rho), \dots$.

3° Les tétraèdres $BCD\omega_2, CDA\omega_2, DAB\omega_2, ABC\omega_2$ sont circonscriptibles à une sphère par leurs arêtes, car on a, par exemple,

$$BC + A\omega_2 = a + \frac{1}{2}(a' + b - c') + R_2 = p + R_2 = CA + B\omega_2 = AB + C\omega_2.$$

Les sphères tangentes aux six arêtes de ces tétraèdres touchent respectivement trois des arêtes du tétraèdre fondamental aux points de contact sur ces arêtes des cercles inscrits à ces faces.

4° Les développements qui précèdent supposent que les points M, M', N, N', P, P' soient intérieurs aux arêtes ; or trois de ces points peuvent être extérieurs à trois arêtes issues du même sommet. Cette configuration possède des propriétés qui se déduisent aisément de celles que nous venons de signaler.

II. SPHÈRES REMARQUABLES DU TÉTRAÈDRE.

Soit un tétraèdre $ABCD$ inscrit dans une sphère de centre O et de rayon R . On sait qu'il existe en général huit sphères dont chacune touche les quatre plans des faces du tétraèdre. Elles se répartissent en deux groupes : le premier est constitué par les quatre sphères $(I_a), (I_b), (I_c), (I_d)$, de rayons r_a, r_b, r_c, r_d , inscrites dans les trièdres tronqués correspondant aux sommets A, B, C, D , le second par la sphère (I) , de rayon r , inscrite au tétraèdre et les trois sphères $(I_1), (I_2), (I_3)$, de rayons r_1, r_2, r_3 , inscrites dans les combles, (le nombre de ces dernières peut se réduire, dans des cas particuliers, à deux, un ou zéro).

1. LEMME I. — *Si l'on considère le centre I_i de l'une des sphères tangentes aux quatre plans des faces d'un tétraèdre $ABCD$ et les centres O_a, O_b, O_c, O_d des sphères circonscrites aux tétraèdres $I_iBCD, I_iCDA, I_iDAB, I_iABC$, la sphère circonscrite au tétraèdre $O_aO_bO_cO_d$ est concentrique à la sphère circonscrite au tétraèdre fondamental ⁽¹⁾.*

En effet, si $I_i(O)$ et $I_i(O_a)$ désignent les puissances du centre I_i de la sphère considérée (I_i) , de rayon r_i , par rapport à la sphère (O) circonscrite au tétraèdre $ABCD$ et à la sphère (O_a) circonscrite au tétraèdre I_iBCD , par exemple, on a, en grandeur et en signe,

$$I_i(O) - I_i(O_a) = 2 O_aO \cdot r_i,$$

c'est-à-dire que

$$O_aO = \pm (d_i^2 - R^2) : 2 r_i, \quad (1)$$

(1) Cfr. V. THÉBAULT, *Annales de la Société scientifique*, 1924, 179.

expression qui ne dépend que du rayon de la sphère (I_i) et de la distance d_i de son centre à celui de la sphère (O) circonscrite au tétraèdre fondamental, de sorte que

$$O_a O = O_b O = O_c O = O_d O = \rho_i. \quad (2)$$

LEMME II. — *Les sphères tangentes intérieurement (ou extérieurement), à l'une des sphères (I_i) et passant respectivement par les sommets (B, C, D) , (C, D, A) , (D, A, B) , (A, B, C) sont tangentes à une sphère concentrique à la sphère circonscrite au tétraèdre fondamental.*

Si l'on considère, par exemple, les sphères (S_a) , (S_b) , (S_c) , (S_d) , de rayons R_a, R_b, R_c, R_d , tangentes intérieurement à la sphère (I) inscrite et passant par les sommets (B, C, D) , (C, D, A) , (D, A, B) , (A, B, C) , on a, en grandeur et en signe, avec des notations analogues à celles déjà employées,

$$2 OS_a \cdot r = \overline{IS_a}^2 - R_a^2 - (\overline{IO}^2 - R^2) = (R_a - r)^2 - R_a^2 - d^2 + R^2;$$

de sorte que

$$OS_a + R_a = (R^2 + r^2 - d^2) : 2r, \quad (3)$$

et, enfin, en vertu de (1) et (2),

$$R' = OS_a + R_a = \rho + \frac{r}{2} = OS_b + R_b = \dots = OS_d + R_d. \quad (4)$$

(ρ désigne le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre $O_a O_b O_c O_d$ des centres des sphères circonscrites aux tétraèdres $IBCD$, $ICDA$, $IDAB$, $IABC$, et $OI = d$). Les sphères (S_a) , (S_b) , (S_c) , (S_d) , dont les centres S_a, S_b, S_c, S_d sont situés sur les perpendiculaires aux faces BCD , CDA , DAB , ABC menées du centre O de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$, sont donc tangentes intérieurement à une sphère de centre O et de rayon $R' = \rho + \frac{r}{2}$ qui les contient toutes les quatre.

Un raisonnement similaire s'applique aux autres sphères (I_i) et la proposition énoncée est établie.

2. M. R. BRICARD a obtenu une autre propriété très remarquable des sphères précédentes (S_a) , (S_b) , (S_c) , (S_d) contenue dans le théorème suivant : ⁽¹⁾

Soient $ABCD$ un tétraèdre, (I) sa sphère inscrite, (I_a) sa sphère

(1) *L'Enseignement scientifique*, 1936, 62. — M. R. BRICARD a obtenu ce théorème comme application du théorème de PONCELET sur les triangles inscrits à une conique et circonscrits à une autre conique et d'un théorème de NEUBERG, (*Mémoire sur le Tétraèdre*, p. 23), par lequel les contacts de deux sphères (I) , (I_a) sur la face BCD d'un tétraèdre $ABCD$ sont les foyers d'une conique inscrite au triangle BCD dont le carré du petit axe est égal à $4rr_a$. (V. T.).

ex-inscrite correspondant au sommet A. Il existe une sphère (S_a) qui passe par B, C, D et qui touche intérieurement (I) et (I_a).

Deux sphères (I_i) appartenant à deux groupes différents touchent une même sphère (S_i) qui passe par trois des sommets du tétraèdre.

Le LEMME II permet une construction simple des sphères de M. BRICARD. Ayant, en effet, par exemple, déterminé les centres O_a, O_b, O_c, O_d des sphères circonscrites aux tétraèdres IBCD, ICDA, IDAB, IABC, il suffit de prolonger les droites OO_a, OO_b, OO_c, OO_d d'une longueur

$$O_a A' = O_b B' = O_c C' = O_d D' = \frac{r}{2},$$

pour que les sphères circonscrites aux tétraèdres $A'BCD, B'CDA, C'DAB, D'ABC$ coïncident avec les sphères (S_a), (S_b), (S_c), (S_d).

Cette construction conduit d'ailleurs à des remarques intéressantes sur les sphères (S_i) que nous nous contenterons seulement d'énoncer pour les sphères précitées (S_a), (S_b), (S_c), (S_d) et qui s'étendent aisément aux trois autres quadruples de sphères obtenus en remplaçant la sphère (I) inscrite par chacune des sphères (I_1), (I_2), (I_3) des combles, lorsqu'elles existent.

Puisque les sphères (I, r) et (O, R') touchent les quatre sphères (S_a), (S_b), (S_c), (S_d), les contacts étant de nature différente, elles se correspondent dans une inversion dont le pôle est le centre radical des sphères (S_a), (S_b), (S_c), (S_d) et qui coïncide avec le centre de similitude direct Σ des sphères (O, R') et (I, r). On a donc

$$\Sigma O : \Sigma I = R' : r = (2\rho + r) : 2r,$$

et le module d'inversion résulte des expressions connues de R' et de la distance ΣO . D'après des propriétés connues (¹), il en résulte que la droite OI des centres des sphères circonscrite et inscrite au tétraèdre ABCD est normale au plan de similitude direct des quatre sphères (S_a), (S_b), (S_c), (S_d) et, en outre, que le centre radical Σ de ces sphères, situé sur OI , est un centre de similitude des sphères circonscrites aux tétraèdres ABCD et $A''B''C''D''$ dont les sommets sont les intersections des sphères (S_a), (S_b), (S_c), (S_d) prises trois par trois. Les centres O, O'' des sphères circonscrites aux tétraèdres ABCD, $A''B''C''D''$ sont les foyers d'une quadrique de révolution inscrite au tétraèdre $S_a S_b S_c S_d$ dont la sphère principale a pour diamètre

$$\delta = R - R'' = \frac{d}{\Sigma O} \cdot R,$$

en observant que les sphères (O, R) et (O'' , R'') se correspondent dans l'inversion dont il a été question tout à l'heure.

(¹) Cfr. J. NEUBERG, *loc. cit.* — V. THÉBAULT, *Annales de la Société scientifique*, 1921-239.

Enfin, soient $\rho, \rho_a, \rho_b, \rho_c$ les rayons des sphères circonscrites aux tétraèdres dont les sommets (O_a, O_b, O_c, O_d), ..., sont les centres des sphères circonscrits aux tétraèdres (IBCD, ...), (I_a BCD, ...)

La sphère (S_a), par exemple, touchant les sphères (I, r) et (I_a, r_a), en vertu du théorème de M. R. BRICARD, on a également, en tenant compte de (4),

$$\rho + \frac{r}{2} = \rho_a + \frac{r_a}{2} = \rho_b + \frac{r_b}{2} = \rho_c + \frac{r_c}{2} = \rho_d + \frac{r_d}{2}$$

et les relations des formes

$$\rho - \rho_a = \frac{1}{2} (r_a - r), \quad \rho_a - \rho_b = \frac{1}{2} (r_b - r_a), \dots,$$

entre les rayons des sphères circonscrites aux tétraèdres ($O_a O_b O_c O_d$), ..., et ceux des sphères tangentes aux quatre plans des faces du tétraèdre fondamental.

TÉTRAÈDRES ET SPHÈRES DE ROBERTS

Note de M. P. DELENS, Le Havre (France)

La configuration du tétraèdre et des sphères de S. ROBERTS se rattache, comme on sait, à une configuration connue de cercles relative au triangle ; ces configurations se généralisent d'ailleurs sous forme anallagmatique en des configurations symétriques de cercles et de sphères. Je précise ici que la configuration de S. ROBERTS dépendant, pour un tétraèdre donné, de 6 paramètres, il reste bien, quand le point de concours des sphères en jeu est fixé, 3 paramètres arbitraires, sur le choix desquels je donne quelques indications : d'où un système intéressant de ∞^3 tétraèdres inscrits à un tétraèdre fixe, ou inversement. Utilisant ensuite, pour le triangle et le tétraèdre, une importante remarque de M. V. THÉBAULT ⁽¹⁾, j'ai obtenu le résultat que les 4 points diamétralement opposés aux sommets du tétraèdre sur les sphères de ROBERTS correspondantes forment avec le point de concours de ces sphères un pentagone plan, en relation remarquable avec le pentagone général formé par les sommets et ce point de concours. Je donne de cette relation différentes démonstrations, géométrique et vectorielles. Je prolonge alors sommairement l'étude du système considéré de ∞^3 tétraèdres inscrits à un tétraèdre fixe par quelques indications relatives au système réciproque de ∞^3 tétraèdres circonscrits à un tétraèdre donné.

Ayant annoncé à M. V. THÉBAULT certains de ces résultats, celui-ci m'a fait savoir que la propriété du pentagone plan avait précédemment été obtenue par M. R. BOUVAIST qui, ayant cru ensuite que sa démonstration manquait de généralité, ne l'avait pas publiée. M. R. BOUVAIST a bien voulu revoir ses calculs et me communiquer sa démon-

⁽¹⁾ Cfr. en particulier V. THÉBAULT, Sur les sphères de S. Roberts. *Ann. de la Société scient. de Bruxelles*, 1937, t. LVII, série I, p. 16-22.

stration (n° 6) qui possède bien toute la généralité désirable : l'intéressante propriété en cause doit donc être attribuée à cet Auteur.

1. La propriété connue du triangle : *trois cercles passant chacun par un sommet et se coupant deux à deux sur les côtés adjacents concourent en un même point* — est anallagmatiquement équivalente à une configuration $(8_3, 6_4)$ de 8 points et 6 cercles (3 cercles par un point, 4 points sur un cercle) ⁽¹⁾. Cette configuration correspond encore à l'énoncé (où la symétrie est rompue) : *soient A, B, C, D quatre points d'un cercle ; les secondes intersections de quatre cercles arbitraires par D et A, A et B, B et C, C et D, sont quatre points A', B', C', D' d'un même cercle*.

Revenant à un triangle et aux trois cercles indiqués, j'emploie les notations suivantes : $T \equiv ABC$, triangle de base, de sommets $J = A, B, C$; $\{\omega_A\}, \{\omega_B\}, \{\omega_C\}$, cercles de centres $\omega_A, \omega_B, \omega_C$, passant respectivement par A, B, C, se coupant deux à deux en I_A, I_B, I_C sur BC, CA, AB et concourant en I ; $T_i \equiv I_A I_B I_C$, triangle *isopodaire* de I pour T (semblable au triangle podaire de I), inscrit à T ; $T_w \equiv \omega_A \omega_B \omega_C$, triangle semblable à T, inscrit au triangle *t médiateur* de I et T, qui est l'homothétique par $(I, \frac{1}{2})$ du triangle antipodaire de I pour T ; $T' \equiv A'B'C'$, triangle orthogonalement semblable à T, dont les sommets sont diamétralement opposés de ceux de T sur les cercles $\{\omega_J\}$ relatifs à ces sommets. T' est inscrit au *trilatère dégénéré* $T_x \equiv X_A X_B X_C$ dont les côtés sont les droites X_A, X_B, X_C concourant en I et respectivement perpendiculaires à AI, BI, CI.

Pour T et I fixés on obtient ∞^1 triangles variables *inscrits* T_i (dans T), T' (dans T_x), avec I comme centre permanent de similitude (d'homothétie pour les T') ; de même pour les triangles T_w . Il est indiqué d'associer I aux divers triangles et de considérer les quadrangles complets $Q \equiv T I$, $Q_i \equiv T_i I$, $Q' \equiv T' I$, $Q_w \equiv T_w I$; en particulier les quadrangles Q et Q' sont orthogonalement semblables. Si on considère I et T_i comme fixes, on obtient des systèmes de ∞^1 triangles *circonscrits* semblablement variables, les sommets de T, par exemple, se déplaçant sur les cercles $\{\omega_J\}$ correspondants.

Dans le premier cas, la variation de T' régit facilement tout le système. Pour préciser les relations, désignons respectivement par

$$\begin{array}{lll} j = a, b, c, & \rho_J (J = A, B, C), & j' = a', b', c', \quad (2) \\ \text{les vecteurs } IJ, & I\omega_J (J = A, B, C), & IJ' (J' = A', B', C') ; \end{array}$$

v étant un vecteur arbitraire perpendiculaire au plan de T, la correspondance $T \rightarrow T'$, à savoir la similitude $(I, \pi/2, -\cotg \theta)$ où θ est l'angle

⁽¹⁾ On obtient une autre configuration de même caractéristique quand les cercles se groupent par trois en faisceaux et non en réseaux singuliers.

⁽²⁾ Les lettres j, j' correspondent à la lettre ou à l'indice J.

$(BC, II_A) = \dots$, est définie par $j' = v \wedge j^{(1)}$; pour $T \rightarrow T_w, \rho_j = \frac{1}{2}(j + v \wedge j)$.

Soit plus généralement le triangle $T'' \equiv A''B''C''$ dont les sommets $J'' = A'', B'', C''$ sont définis sur les droites JJ' par le rapport algébrique $k = J'J''/JJ'$; avec l'angle $\psi = (IJ', IJ'')$, $k/\sin \psi = \cos \theta/\sin(\theta + \psi)$ et j'' désignant le vecteur IJ'' , la correspondance $T \rightarrow T''$, similitude $(I, \frac{\pi}{2} + \psi, -k/\sin \psi)$, est définie par $j'' = kj + (1 - k)v \wedge j$. Pour $\rho_j, k = 1/2, \psi = \theta$.

2. Au point de vue anallagmatique le tétraèdre et un système de quatre sphères de ROBERTS forment une configuration $(16_4^4, 24_2^4, 8_3^6)$ de 16 points, 24 cercles et 8 sphères, comportant : 4 sphères et 6 cercles par un point, 4 points sur un cercle et 2 sphères par ce cercle, 6 cercles et 8 points sur une sphère selon une configuration $(8_3, 6_4)$ du n° 1, soit χ . Cette configuration correspond à l'énoncé : *soit une sphère portant une configuration χ ; par chacun de ses 6 cercles on fait passer une sphère arbitraire. Les intersections de ces sphères deux à deux (correspondant aux intersections des cercles de la configuration χ initiale), définissent sur chacune d'elles une configuration χ et les 6 cercles fermant, sur chacune de ces sphères, la configuration χ qu'elle porte, appartiennent eux-mêmes à une même sphère sur laquelle ils forment encore une configuration χ .*

J'emploierai pour le tétraèdre les notations : $\mathcal{T} \equiv ABCD$, tétraèdre de base, de sommets $J = A, B, C, D$, de faces $\imath = \alpha, \beta, \gamma, \delta$ (avec correspondance des lettres J et \imath); Ω_j les quatre sphères de ROBERTS, ω_j leurs centres; sphères se coupant par trois sur les faces aux points I_j , par deux sur les arêtes en $I_{DA}, I_{DB}, I_{DC}, I_{BC}, I_{CA}, I_{AB}$ respectivement sur BC, CA, AB, DA, DB, DC . Avec ces notations les 8 sphères de l'énoncé précédent sont \imath et Ω_j , les 24 cercles $\{\imath\imath^*\}$, $\{\Omega_j\Omega_{j^*}\}$, $\{\imath\Omega_{j^*}\}$ avec indices \imath et \imath^*, J et J^* , \imath et J^* discordants ($J, J^* = A, B, C, D$; $\imath, \imath^* = \alpha, \beta, \gamma, \delta$).

Soient encore les tétraèdres $\mathcal{T}_i \equiv I_A I_B I_C I_D$, $\mathcal{T}_w \equiv \omega_A \omega_B \omega_C \omega_D$ et le quadrangle $\mathcal{T}' \equiv A'B'C'D'$ de sommets J' diamétralement opposés aux J sur les sphères Ω_j . Sur la face δ , par exemple, les points $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ se projettent en $\omega_{A,D}, \omega_{B,D}, \omega_{C,D}$, centres des cercles $\{\omega_{A,D}\}, \dots$, les points A', B', C' en A'_D, B'_D, C'_D et les triangles $T_D \equiv ABC, T_{w,D} \equiv \omega_{A,D} \omega_{B,D} \omega_{C,D}$, $T'_D \equiv A'_D B'_D C'_D$ correspondent aux notations T, T_w, T' du n° 1. Pour \mathcal{T} et I fixes, \mathcal{T}_i est l'homologue variable du tétraèdre podaire de I pour \mathcal{T} , inscrit à \mathcal{T} ; \mathcal{T}_w celui de \mathcal{T} , inscrit au tétraèdre médiateur τ de I et \mathcal{T} , homothétique par $(I, 1/2)$ de l'antipodaire de I pour \mathcal{T} ; le quadrangle \mathcal{T}'

(1) J'emploie ici et dans la suite les notations françaises des opérations vectorielles; pour des vecteurs a, b, c, \dots le carré et le produit scalaire sont écrits \bar{a}^2 et $a \cdot b$, le produit vectoriel $a \wedge b$, le produit mixte $(a, b, c) = a \cdot (b \wedge c)$.

est inscrit à l'angle tétraèdre $\mathcal{T}_\varepsilon \equiv \varepsilon_A \varepsilon_B \varepsilon_C \varepsilon_D$, tétraèdre dégénéré dont les faces ε_J sont des plans concourants en I, respectivement perpendiculaires aux droites IJ. Attachant I aux diverses figures énoncées, il convient de considérer les pentagones complets $\mathcal{P} \equiv \mathcal{T}I$, $\mathcal{P}_i \equiv \mathcal{T}_i I$, $\mathcal{P}_w \equiv \mathcal{T}_w I$, $\mathcal{P}' \equiv \mathcal{T}'I$. En particulier l'angle tétraèdre complet I. $\varepsilon_A \varepsilon_B \varepsilon_C \varepsilon_D$ est *supplémentaire* de l'angle tétraèdre complet I. ABCD (faces du premier perpendiculaires aux arêtes du second) et la relation est réciproque.

3. Vérifions que, pour \mathcal{T} et I fixes, la variation de \mathcal{T}_i et des autres figures mobiles (sphères de ROBERTS, etc.) dépend de 3 paramètres. On ne peut choisir arbitrairement les points I_{BC} , I_{CA} , I_{AB} sur trois arêtes concourantes de \mathcal{T} : ces points appartiennent avec D et I à une même sphère Ω_D et les abscisses \overline{DI}_{BC} , \overline{DI}_{CA} , \overline{DI}_{AB} sont liées par une relation linéaire ; ni trois points I_{DA} , I_{DB} , I_{DC} sur les côtés d'un triangle T_D . Mais l'on peut choisir arbitrairement, par exemple, I_{BC} sur DA et I_A dans la face α , dépendant respectivement de 1 et 2 paramètres, et ce choix détermine complètement, en général, la figure mobile : le cercle $\{DI_{BC}\}$ définit le point $I_{BC, A}$ de α , d'où dans cette face (si $I_A \neq I_{BC, A}$, sinon la donnée I_{BC} disparaît) le cercle $\{\omega_{D, A} \equiv \{DI_A I_{BC, A}\}$, les points I_{CA} , I_{AB} , etc. On peut encore remarquer ici l'intervention de la configuration plane χ relative au triangle dans les sections de \mathcal{T} par les plans tels que DAI, ceci pouvant aider le calcul de certains éléments mobiles. Si l'on fixe au contraire \mathcal{T} et I, donc le système des sphères Ω_J , on aura de même ∞^3 tétraèdres mobiles \mathcal{T} circonscrits à \mathcal{T}_i , avec sommets J sur les sphères Ω_J ; ceci résulte aussi d'une étude de J. NEUBERG ⁽¹⁾ qui a parlé de ∞^1 tétraèdres \mathcal{T} , mais à partir d'un plan ABC arbitrairement fixé, et dont la variation autour de I_D introduit bien les 2 paramètres restants.

4. Si l'on cherche à régir, pour \mathcal{T} et I fixes, le déplacement du système mobile par celui du quadrangle \mathcal{T}' , ou du pentagone \mathcal{P}' , la proposition fondamentale est la suivante : le pentagone complet $\mathcal{P}' \equiv IA'B'C'D'$ est plan.

Démonstration géométrique. — Pour deux triangles T, T' d'un même plan (notations du n° 1), orthogonalement semblables, le centre de similitude I est le point commun aux cercles $\{\omega_J\}$ de diamètres respectifs AA', BB', CC'.

Soient maintenant les quadrangles ou tétraèdres \mathcal{T} , \mathcal{T}' (notations du

⁽¹⁾ J. NEUBERG, *Mathesis*, 1884, p. 17.

n° 2) à côtés homologues orthogonaux. Considérons deux faces triangulaires homologues, T_D et $A'B'C'$, celle-ci projetée en $T'_D \equiv A'_D B'_D C'_D$ sur le plan de T_D ; T'_D est orthogonalement semblable à T_D . De même T_D se projette sur le plan de $A'B'C'$ suivant un triangle orthogonalement semblable à celui-ci. Si l'on cherche les points I tels que les rayons homologues IA, IB, IC et IA' , IB' , IC' soient rectangulaires, on obtient par la construction précédente un point I_D du plan ABC et un point I du plan $A'B'C'$, points communs aux sphères Ω_A , Ω_B , Ω_C de diamètres respectifs AA' , BB' , CC' .

Il en est de même en considérant les autres faces homologues de \mathcal{T} et \mathcal{T}' . Or, \mathcal{T} étant un tétraèdre effectif, le seul point I répondant à la condition que tous les rayons homologues II, IJ' soient perpendiculaires (point dont l'existence est d'ailleurs connue dans l'étude directe) doit appartenir à la fois aux plans $A'B'C'$, $B'C'D'$, $C'D'A'$, $D'A'B'$. Le pentagone complet \mathcal{P}' est donc plan, ou le quadrangle \mathcal{C}' plan, dans un plan $\bar{\omega}$ passant par I.

Démonstration vectorielle. — Soient $j = a, b, c, d$ et $j' = a', b', c', d'$ les vecteurs II et IJ' . L'orthogonalité des arêtes homologues de \mathcal{P} et \mathcal{P}' est traduite par les conditions

$$(1) \quad a' \cdot a = 0, \quad b' \cdot b = 0, \quad c' \cdot c = 0, \quad d' \cdot d = 0,$$

et six relations du type $(c' - b') \cdot (c - b) = 0$, qui, compte tenu de (1), peuvent s'écrire

$$(2) \quad \begin{cases} b' \cdot c + b \cdot c' = 0, & c' \cdot a + c \cdot a' = 0, & a' \cdot b + a \cdot b' = 0, \\ a' \cdot d + a \cdot d' = 0, & b' \cdot d + b \cdot d' = 0, & c' \cdot d + c \cdot d' = 0. \end{cases}$$

Les trois premières relations (1) sont satisfaites en posant

$$a' = x \wedge a, \quad b' = y \wedge b, \quad c' = z \wedge c,$$

les vecteurs x, y, z étant des inconnues auxiliaires; les trois premières relations (2) donnent alors

$$(b, c, z - y) = 0, \quad (c, a, x - z) = 0, \quad (a, b, y - x) = 0,$$

ou

$$(3) \quad z - y = \mu b + \nu c, \quad x - z = \nu c + \lambda' a, \quad y - x = \lambda a + \mu' b,$$

d'où par addition

$$0 = (\lambda + \lambda') a + (\mu + \mu') b + (\nu + \nu') c.$$

Or trois au moins des vecteurs j sont linéairement indépendants: en supposant que ce soient a, b, c , il s'ensuit $\lambda + \lambda' = 0$, $\mu + \mu' = 0$, $\nu + \nu' = 0$,

$$(4) \quad z - y = \mu b - \nu c, \quad x - z = \nu c - \lambda a, \quad y - x = \lambda a - \mu b.$$

Calculons alors

$$\begin{aligned} a' \wedge b' &= (x, y, b)a - (a, y, b)x, \\ (a', b', c') &= (x, y, b)(a, z, c) - (a, y, b)(x, z, c), \end{aligned}$$

et en tenant compte de (4)

$$(a', b', c') = (x - y, y, b)(a, z, c) - (a, y, b)(x - z, z, c) = 0,$$

donc le quadrangle $1A'B'C'$ est plan. Les relations entre les autres faces homologues de \mathcal{C} et \mathcal{C}' donnent, en posant $d' = t \wedge d$, de nouvelles relations de forme (3), qui, avec (4), donnent sans peine $x = y = z = t$. Mais une autre démonstration vectorielle est plus directe.

5. *Seconde démonstration vectorielle.* — Supposant toujours, comme on le peut, les trois vecteurs a, b, c linéairement indépendants, soit \mathcal{H} le symbole de l'homographie vectorielle, ou affinité, qui leur fait correspondre a', b', c' , selon

$$(5) \quad a' = a \cdot \mathcal{H}, \quad b' = b \cdot \mathcal{H}, \quad c' = c \cdot \mathcal{H}.$$

Les trois premières relations de chacun des groupes (1) et (2) donnant

$$a \cdot \mathcal{H} \cdot a = 0, \dots, \dots, \quad b \cdot \mathcal{H} \cdot c + c \cdot \mathcal{H} \cdot b = 0, \dots, \dots,$$

la partie symétrique de \mathcal{H} est nulle : l'affinité \mathcal{H} est alternée et on peut remplacer (5) par

$$(6) \quad a' = v \wedge a, \quad b' = v \wedge b, \quad c' = v \wedge c,$$

v étant un vecteur arbitraire ; posant alors $d' = v \wedge d + d^*$, les relations (1) et (2) restantes donnent

$$d^* \cdot a = d^* \cdot b = d^* \cdot c = d^* \cdot d = 0, \quad \text{donc} \quad d^* = 0, \quad d' = v \wedge d.$$

Les pentagones complets \mathcal{P} et \mathcal{P}' se correspondent donc par l'affinité \mathcal{H} dégénérée définie en (6), c'est-à-dire que les vecteurs j et j' sont liés par des relations de forme $x' = v \wedge x$ avec v arbitraire, correspondance qui introduit bien 3 paramètres. Il s'ensuit la construction suivante de \mathcal{C}' : projeter orthogonalement les sommets de \mathcal{C} sur un plan arbitraire $\bar{\omega}$ passant par 1, suivant un quadrangle plan $\mathcal{C}_0 \equiv A_0 B_0 C_0 D_0$; \mathcal{C}' résulte de \mathcal{C}_0 par une rotation de $\pi/2$ et une homothétie arbitraire, de centre commun 1.

Remarque. — Cette démonstration est valable pour un $(n+1)$ -èdre effectif $ABC \dots L$ de l'espace à n dimensions, mais sa conclusion dépend de la parité de n : c'est seulement pour n impair que l'homographie alternée \mathcal{H} est dégénérée (déterminant symétrique gauche d'ordre impair, nul), donc le $(n+1)$ -èdre $A'B'C' \dots L'$ situé dans un hyperplan passant par 1.

6. La démonstration analytique obtenue (Novembre 1936) par M. R. BOUVAIST est la suivante (avec la rédaction et les notations de cet Auteur ⁽¹⁾).

Proposition. — On considère un tétraèdre et quatre points A', B', C', D' ; les sphères $(AA'), (BB'), (CC'), (DD')$ de diamètres AA', BB', CC', DD' étant soumises aux conditions suivantes : α) passer par un même point O ; β) (AA') et (BB') se coupent sur AB , (AA') et (CC') sur AC , (AA') et (DD') sur AD , (BB') et (CC') sur BC , (BB') et (DD') sur BD , (CC') et (DD') sur CD .

1° Les quatre points A', B', C', D' sont dans un même plan passant par O .

2° M étant un point quelconque de l'espace, le plan mené par A' perpendiculaire à AM coupe AM en U , le plan mené par B' perpendiculaire à BM coupe BM en V , le plan mené par C' perpendiculaire à CM coupe CM en W , le plan mené par D' perpendiculaire à DM coupe DM en T . Ces quatre plans se coupent en M' , et la sphère de diamètre MM' passe par O ⁽²⁾.

Démonstration. — Le point O commun aux quatre sphères est l'origine d'axes rectangulaires. Les coordonnées des points sont

$A \quad x_1, y_1, z_1,$	$A' \quad x'_1, y'_1, z'_1,$
$B \quad x_2, y_2, z_2,$	$B' \quad x'_2, y'_2, z'_2,$
$C \quad x_3, y_3, z_3,$	$C' \quad x'_3, y'_3, z'_3,$
$D \quad x_4, y_4, z_4,$	$D' \quad x'_4, y'_4, z'_4.$

LEMME. — Deux sphères $(AA'), (BB')$ se couperont sur AB si la somme des puissances de A par rapport à (BB') et de B par rapport à (AA') est égale à \overline{AB}^2 .

$$(AA') \equiv (x - x_1)(x - x'_1) + (y - y_1)(y - y'_1) + (z - z_1)(z - z'_1) = 0,$$

$$(BB') \equiv (x - x_2)(x - x'_2) + (y - y_2)(y - y'_2) + (z - z_2)(z - z'_2) = 0;$$

(AA') et (BB') coupant AB en P , soient P_A = puissance de A par rapport à $(BB') = \overline{AP} \cdot \overline{AB}$, P_B = puissance de B par rapport à $(AA') = \overline{BP} \cdot \overline{BA}$, d'où $P_A + P_B = \overline{AB}^2$.

On aura par conséquent :

$$\Sigma (x_2 - x_1)(x_2 - x'_1) + \Sigma (x_1 - x_2)(x_1 - x'_2) = \Sigma (x_1 - x_2)^2,$$

d'où

$$(I)^* \quad \Sigma (x_1 - x_2)(x'_1 - x'_2) = 0,$$

relation qui exprime que AB et $A'B'$ sont perpendiculaires; on a d'ailleurs, l'angle AOA' étant droit, $\Sigma x_1 x'_1 = 0$; l'angle BOB' étant droit, $\Sigma x_2 x'_2 = 0$. D'où, avec $(I)^*$,

$$x_1 x'_2 + y_1 y'_2 + z_1 z'_2 + x_2 x'_1 + y_2 y'_1 + z_2 z'_1 = 0.$$

⁽¹⁾ Le numérotage des formules du n° 6, que j'ai affectées d'astérisques, est indépendant de celui du reste du texte. (P. D.).

⁽²⁾ Cette propriété a été obtenue indépendamment par M. V. THÉBAULT, loc. cit.

(P. D.).

En définitive les points A, B, C, D, A', B', C', D' sont liés par les relations

$$\begin{aligned}
 (1)^* & \quad x_1x'_1 + y_1y'_1 + z_1z'_1 = 0, \\
 (2)^* & \quad x_2x'_2 + y_2y'_2 + z_2z'_2 = 0, \\
 (3)^* & \quad x_3x'_3 + y_3y'_3 + z_3z'_3 = 0, \\
 (4)^* & \quad x_4x'_4 + y_4y'_4 + z_4z'_4 = 0, \\
 (5)^* & \quad x_1x'_2 + y_1y'_2 + z_1z'_2 + x_2x'_1 + y_2y'_1 + z_2z'_1 = 0, \\
 (6)^* & \quad x_1x'_3 + y_1y'_3 + z_1z'_3 + x_3x'_1 + y_3y'_1 + z_3z'_1 = 0, \\
 (7)^* & \quad x_1x'_4 + y_1y'_4 + z_1z'_4 + x_4x'_1 + y_4y'_1 + z_4z'_1 = 0, \\
 (8)^* & \quad x_2x'_3 + y_2y'_3 + z_2z'_3 + x_3x'_2 + y_3y'_2 + z_3z'_2 = 0, \\
 (9)^* & \quad x_2x'_4 + y_2y'_4 + z_2z'_4 + x_4x'_2 + y_4y'_2 + z_4z'_2 = 0, \\
 (10)^* & \quad x_3x'_4 + y_3y'_4 + z_3z'_4 + x_4x'_3 + y_4y'_3 + z_4z'_3 = 0.
 \end{aligned}$$

Nous supposons A, B, C, D donnés quelconques et voulons déterminer A', B', C', D'.

Les points A et A', B et B', C et C', D et D' se correspondent dans la transformation définie par les relations :

$$X = \beta y - \gamma z, \quad Y = \alpha z - \beta x, \quad Z = \gamma x - \alpha y.$$

En effet, en posant

$$\begin{aligned}
 x'_1 &= \beta y_1 - \gamma z_1, & x'_2 &= \beta y_2 - \gamma z_2, \\
 y'_1 &= \alpha z_1 - \beta x_1, & y'_2 &= \alpha z_2 - \beta x_2, \\
 z'_1 &= \gamma x_1 - \alpha y_1, & z'_2 &= \gamma x_2 - \alpha y_2,
 \end{aligned}$$

on voit immédiatement que les relations (1)*, (2)* et (5)* sont vérifiées.

La transformation jouit des propriétés suivantes :

1° Les points (X, Y, Z) sont dans un même plan. On a en effet :

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0.$$

2° Deux points correspondants sont vus de l'origine sous un angle droit. On a en effet :

$$Xx + Yy + Zz = 0.$$

3° Soient A et A', B et B' deux couples de points correspondants ; les sphères de diamètres AA' et BB' se coupent suivant un point de AB et un point de A'B'. Ceci résulte des relations (1)*, (2)*, (5)*.

Soit donné un tétraèdre ABCD et soient A', B', C', D' les points correspondants à A, B, C, D. Soient M et M' deux points correspondants :

Les sphères de diamètres AA', MM' se coupent sur AM en U. Les sphères de diamètres BB', MM' se coupent sur BM en V. Les sphères de diamètres CC', MM' se coupent sur CM en W. Les sphères de diamètres DD', MM' se coupent sur DM en T.

Les points U, V, W, T sont dans un même plan passant par l'origine O.

7. Revenons maintenant aux relations vectorielles en complétant d'abord celles du n° 1 relatives au triangle. Pour les vecteurs d'origine l ayant pour extrémités les sommets de T, T', T_w , nous avons obtenu

$$(7) \quad j' = v \wedge j, \quad \rho_j = \frac{1}{2} (j + v \wedge j).$$

Soient encore $L_J (J = A, B, C)$ les projections orthogonales de l sur les côtés de T et l_J, y_J respectivement les vecteurs lL_J, lI_J . On a aussitôt (le calcul des l_J en fonction des j étant aisé)

$$(8) \quad y_J = l_J + v \wedge l_J,$$

formule dont la comparaison à $(7)_2$ correspond bien aux remarques faites.

Soient alors, pour le tétraèdre, $H_J (J = A, B, C, D)$ les projections orthogonales de l sur les faces de \mathcal{T} . Je désigne par

$$j = a, b, c, d, \quad \rho_j, h_J, x_J (J = A, B, C, D), \quad j' = a', b', c', d', \\ \text{les vecteurs } lJ, l\omega_J, lH_J, lI_J (J = A, B, C, D), \quad lI' (J' = A', B', C', D').$$

Nous avons d'abord les relations

$$(9) \quad j' = v \wedge j, \quad \rho_j = \frac{1}{2} (j + v \wedge j).$$

Dans ces formules, du type

$$(10) \quad x' = \lambda x + \mu v \wedge x,$$

la correspondance vectorielle $x \rightarrow x'$ est une *affinité gauche*. Il importe de remarquer qu'en général la correspondance inverse n'est pas de même espèce. On tire en effet de (10)

$$v \cdot x' = \lambda v \cdot x, \quad v \wedge x' = \lambda v \wedge x + \mu \{ (v \cdot x) v - \bar{v}^2 x \},$$

d'où

$$(11) \quad (\lambda^2 + \mu^2 \bar{v}^2) x = \lambda x' - \mu v \wedge x' + \frac{\mu^2}{\lambda} (v \cdot x') v,$$

avec un terme supplémentaire par rapport à (10). En particulier les *affinités gauches* définies en $(9)_2$ ne forment pas, pour v arbitrairement variable, un groupe de transformations à 3 paramètres, et la relation entre les tétraèdres \mathcal{T}_w n'est pas comparable à celles qu'ils ont avec \mathcal{T} . Cette relation entre deux tétraèdres \mathcal{T}_w s'obtient sans peine d'après $(9)_2$.

8. Le calcul des h_J en fonction des j résulte des relations $\bar{h}_J^2 = j^* \cdot h_J$ avec lettres $j^* = a, b, c, d$ et indices $J = A, B, C, D$ discordants; on a par exemple, avec n_D vecteur unitaire normal à la face δ , et en posant

$$a \wedge b + b \wedge c + c \wedge a = 2s_D = 2S_D n_D, \\ (12) \quad h_D = (a, b, c) \frac{2s_D}{4S_D^2} = \frac{(a, b, c)}{2S_D} n_D.$$

Pour le calcul inverse il est commode d'introduire le système de vecteurs k_A, k_B, k_C réciproque de h_A, h_B, h_C , tel que

$$(h_A, h_B, h_C) k_A = h_B \wedge h_C, \text{ etc. } ^{(1)}, \quad \text{d'où}$$

$$(13) \quad d = \bar{h}_A^2 k_A + \bar{h}_B^2 k_B + \bar{h}_C^2 k_C.$$

Sur la face δ (par exemple), I_D est déterminé comme point uni de la correspondance homographique $T_D \rightarrow T'_D$ et sa position résulte aussitôt des relations *vectorielles* telles que $IA'_D = IH_D + H_D A'_D$, soit

$$\begin{aligned} a'_D &= h_D + \{ n_D \wedge (v \wedge a) \} \wedge n_D = h_D + \{ (n_D \cdot a) v - (n_D \cdot v) a \} \wedge n_D, \\ &= h_D + (n_D \cdot a) v \wedge n_D + (n_D \cdot v) n_D \wedge a = (h_D + v \wedge h_D) + (v \cdot n_D) n_D \wedge a, \end{aligned}$$

qu'on peut encore écrire

$$a'_D = \{ h_D + v \wedge h_D + (v \cdot n_D) n_D \wedge x_D \} + \{ (v \cdot n_D) n_D \wedge (a - x_D) \}.$$

On peut donc poser

$$(14) \quad \begin{cases} v_D = (v \cdot n_D) n_D, & x_D - v_D \wedge x_D = h_D + v \wedge h_D, \\ j'_D = x_D + v_D \wedge (j - x_D), & (j = a, b, c; \quad j'_D = a'_D, b'_D, c'_D). \end{cases}$$

Ces *formules fondamentales*, d'interprétation immédiate, donnent simplement, pour \mathcal{C} et I fixes, les relations entre les tétraèdres fixes et variables et les triangles analogues obtenus par projections sur les faces de \mathcal{C} . De $(14)_2$ on tire sans peine, selon le passage de (10) à (11),

$$(15) \quad (1 + \bar{v}_D^2) x_D = h_D + v \wedge h_D + (v \cdot h_D) v.$$

Avec les vecteurs parallèles à la face δ , $z_D = x_D - h_D$, $w_D = v - v_D$, les formules $(14)_2$ et (15) s'écrivent

$$(16) \quad z_D - v_D \wedge z_D = w_D \wedge h_D, \quad (1 + \bar{v}_D^2) z_D = w_D \wedge h_D + (v_D \cdot h_D) w_D.$$

Pour I et \mathcal{C}_i fixes, la variation de \mathcal{C} est définie ici de façon moins simple. En posant dans (15) $h'_D = h_D / (1 + \bar{v}_D^2)$, on obtient comme précédemment

$$(17) \quad (1 + \bar{v}^2) h'_D = x_D - v \wedge x_D + \frac{v \cdot x_D}{1 + \bar{v}^2} v,$$

puis \bar{v}_D^2 par $\bar{h}'^2_D \bar{v}_D^2 = (v \cdot h'_D)^2$, d'où h_D . L'emploi des formules (13) ferait ensuite connaître les vecteurs j . Je ne développe pas ce calcul qui, malgré quelques simplifications, reste assez compliqué.

⁽¹⁾ Je n'insiste pas sur les cas particuliers, ni sur les identités entre vecteurs a, b, c, d , etc.

SUR L'INTERPRÉTATION D'EDDINGTON DE L'ÉQUATION DE DIRAC

par M. G. LEMAÎTRE

Introduction.

Pour Eddington ⁽¹⁾, l'équation de l'électron de Dirac est une identité que doit satisfaire un des facteurs d'un nombre quantique factorisable dont certaines composantes, formant une pentade, sont données.

Pour expliquer les diverses notions comprises dans cet énoncé, Eddington utilise les nombres complexes du quatrième ordre de Clifford, et il fait appel, comme Dirac d'ailleurs, à une représentation de ces nombres complexes par des matrices.

À l'endroit cité, le lecteur est invité à vérifier l'équation 5.41, en effectuant un désagréable calcul de matrices. Eddington montre ensuite que le résultat est indépendant de la représentation adoptée.

La représentation des nombres hypercomplexes par des matrices joue encore un rôle dans l'exposé d'Eddington en lui permettant de restreindre les unités à des nombres dont la représentation en matrice est entièrement réelle ou entièrement imaginaire. Cette restriction est essentielle, c'est sur elle que sont basées toutes les discussions de réalité.

Nous nous proposons d'exposer la théorie des nombres de Clifford du quatrième ordre en les considérant comme produits de deux systèmes de quaternions. Notre point de vue est presque identique à celui de Combebiac ⁽²⁾, qui a donné aux nombres de Clifford du quatrième ordre le nom de quadriquaternions.

Il nous sera alors facile d'introduire les diverses notions impliquées dans l'interprétation que donne Eddington de l'équation de Dirac, et de démontrer son théorème fondamental sans faire appel à un calcul de matrices.

Si nous restreignons les quadriquaternions tels que nous les définissons ici à des nombres hypercomplexes dont les composantes sont des nombres réels, nous introduisons une restriction qui est précisément équivalente à celle qu'Eddington introduit par la considération de matrices entièrement réelles ou entièrement imaginaires.

Quaternions et quadriquaternions.

Un quaternion est une expression de la forme

$$a_0 + a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3$$

⁽¹⁾ Relativity Theory of Protons and Electrons.

⁽²⁾ Encyclopédie des mathématiques I₅ p. 402.

où a_0, a_1, a_2, a_3 sont des nombres ordinaires, et A_1, A_2, A_3 sont des unités complexes vérifiant les relations

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2 A_3 = -A_3 A_2 \\ A_2 &= A_3 A_1 = -A_1 A_3 & A_1^2 &= A_2^2 = A_3^2 = -1 \\ A_3 &= A_1 A_2 = -A_2 A_1 \end{aligned}$$

Si B_1, B_2, B_3 représentent des unités vérifiant les mêmes lois

$$\begin{aligned} B_1 &= B_2 B_3 = -B_3 B_2 \\ B_2 &= B_3 B_1 = -B_1 B_3 & B_1^2 &= B_2^2 = B_3^2 = -1 \\ B_3 &= B_1 B_2 = -B_2 B_1 \end{aligned}$$

unités qui commuent avec les A

$$A_i B_k = B_k A_i,$$

alors les nombres complexes obtenus en introduisant les A et les B ainsi que leurs produits, sont des nombres complexes appelés par Eddington « E numbers » et connus sous le nom de nombres de Clifford du quatrième ordre ou quadriquaternions.

Toutes les relations précédentes subsistent si nous transposons l'ordre de tous les facteurs des produits et si, en même temps, nous remplaçons chaque A_k et chaque B_k par $-A_k$ et $-B_k$. Nous désignerons cette opération sous le nom de transposition. Dans un quadriquaternion, nous pouvons distinguer une partie symétrique, qui ne change pas par transposition, et une partie antisymétrique, qui change de signe par transposition. La partie antisymétrique est celle qui ne contient que les unités

$$A_1 A_2 A_3 B_1 B_2 B_3$$

et non les produits des A par les B, ni naturellement l'unité principale.

Les deux unités quaternioniques forment ce qu'Eddington appelle des triades conjuguées. Dans son système de représentation par des matrices, les matrices entièrement réelles forment deux triades conjuguées. Nous pouvons nous dispenser de la représentation en matrices si nous mettons en évidence, dès le début, les deux quaternions qui, pour Eddington, forment la partie réelle et d'ailleurs aussi la partie antisymétrique de la représentation qu'il utilise.

Antitriades.

Dans un quadriquaternion, nous pouvons distinguer en outre des quaternions partiels d'autres nombres hypercomplexes qui forment un système à eux seuls.

Les unités

$$\begin{aligned} D_1 &= A_1 B_1 \\ D_2 &= A_2 B_2 \\ D_3 &= A_3 B_3, \end{aligned}$$

forment un système de nombres vérifiant les relations

$$\begin{aligned} D_1 &= D_2 D_3 = D_3 D_2 \\ D_2 &= D_3 D_1 = D_1 D_3 & D_1^2 &= D_2^2 = D_3^2 = 1 \\ D_3 &= D_1 D_2 = D_2 D_1 \end{aligned}$$

qui résultent immédiatement des règles de multiplication des A et des B.

Si on combine les A et les B dans un autre ordre, on peut former d'autres unités

$$\begin{aligned} S_1 &= A_3 B_2 \\ S_2 &= A_1 B_3 \\ S_3 &= A_2 B_1 \end{aligned}$$

qui obéissent aux mêmes règles de multiplication

$$\begin{aligned} S_1 &= S_2 S_3 = S_3 S_2 \\ S_2 &= S_3 S_1 = S_1 S_3 & S_1^2 &= S_2^2 = S_3^2 = 1 \\ S_3 &= S_1 S_2 = S_2 S_1 \end{aligned}$$

Inversement les quaternions A et B peuvent être définis au moyen des S et des D. On a en effet

$$\begin{aligned} A_1 &= S_1 D_2 = -D_2 S_1 \\ A_2 &= S_2 D_3 = -D_3 S_2 \\ A_3 &= S_3 D_1 = -D_1 S_3 \\ B_1 &= D_3 S_1 = -S_1 D_3 \\ B_2 &= D_1 S_2 = -S_2 D_1 \\ B_3 &= D_2 S_3 = -S_3 D_2 \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} S_1 D_1 &= D_1 S_1 \\ S_2 D_2 &= D_2 S_2 \\ S_3 D_3 &= D_3 S_3 \end{aligned}$$

Les nombres S et D sont introduits par Eddington sous le nom d'antitriades.

Vecteurs.

Le quadriquaternion

$$C = \frac{1}{4} (1 + D_1 + D_2 + D_3)$$

a la propriété d'absorber les unités D. On a en effet

$$\begin{aligned} C D_1 &= D_1 C = C \\ C D_2 &= D_2 C = C \\ C D_3 &= D_3 C = C \end{aligned}$$

et aussi

$$C^2 = C.$$

Si donc nous multiplions un quadriquaternion par C, que nous exprimons les unités sous forme de produits SD et notons que C absorbe les D, il nous reste un quadriquaternion spécial qui ne contient que quatre composantes et que nous appelons un vecteur,

$$TC = (\Psi_0 + \Psi_1 S_1 + \Psi_2 S_2 + \Psi_3 S_3)C.$$

Il existe deux sortes de vecteurs, le vecteur final pour lequel la multiplication a été faite à droite, et nous écrivons alors

$$TC = \Psi = \Psi C,$$

et le vecteur initial que nous distinguerons avec Eddington par un astérisque ⁽¹⁾

$$CT = X^* = CX^*.$$

Lorsqu'on multiplie l'un par l'autre deux vecteurs d'espèce opposée, on obtient deux sortes de produits : le produit intérieur

$$X^* \Psi = CX^* \Psi C,$$

et le produit extérieur

$$\Psi X^* = \Psi CX^*,$$

ce dernier produit forme une classe spéciale de quadriquaternions appelés quadriquaternions factorisables.

On a explicitement

$$\Psi X^* = (\Psi_0 + \Psi_1 S_1 + \Psi_2 S_2 + \Psi_3 S_3) C (X_0 + X_1 S_1 + X_2 S_2 + X_3 S_3).$$

La partie de ce quadriquaternion qui ne contient que l'unité principale est

$$\frac{1}{4} (\Psi_0 X_0 + \Psi_1 X_1 + \Psi_2 X_2 + \Psi_3 X_3) = \frac{1}{4} (\Psi, X).$$

On voit de même que le produit intérieur se réduit à $(X, \Psi)C$, soit C multiplié par quatre fois la « partie algébrique » du produit extérieur.

Transformations de vecteurs.

Si on multiplie (à gauche) un vecteur final par un quadriquaternion quelconque, le produit est encore un vecteur final. Un quadriquaternion définit donc une transformation de vecteurs.

$$\Phi' C = T \Phi C.$$

Si en particulier T est le produit extérieur de deux vecteurs

$$T = \Psi X^* = \Psi CX^*,$$

⁽¹⁾ On pourrait se passer de la notation de l'astérisque en s'imposant d'explicitier partout les C. Remarquons en particulier que le transposé de ΨC est $C \Psi$, soit Ψ^* ayant les mêmes composantes que Ψ .

on peut écrire explicitement la transformation. On a en effet

$$\Phi' C = \Psi C X^* \Phi C = \Psi(X, \Phi) C,$$

soit en identifiant les deux vecteurs

$$\Phi'_\alpha = \sum_{\beta=0}^3 \Psi_\alpha X_\beta \Phi_\beta$$

qui définit la transformation

$$\Phi'_\alpha = \sum_{\beta} A_{\alpha\beta} \Phi_\beta$$

où

$$A_{\alpha\beta} = \Psi_\alpha X_\beta.$$

Le quadriquaternion factorisable peut donc être caractérisé par une matrice factorisable, une matrice qui est le produit extérieur de deux quadrvecteurs.

Réciproquement, toute matrice de transformation peut être considérée comme une somme de matrices factorisables, et la transformation peut être obtenue par multiplication (à gauche) du vecteur par le quadriquaternion obtenu en ajoutant les quadriquaternions factorisables correspondant à chaque matrice.

Ceci nous permet de représenter chaque quadriquaternion par une matrice et réciproquement. Par exemple, la relation

$$\begin{aligned} \varphi' &= S_1 \varphi = S_1 (\varphi_0 + \varphi_1 S_1 + \varphi_2 S_2 + \varphi_3 S_3) C \\ &= (\varphi_1 + \varphi_0 S_1 + \varphi_2 S_2 + \varphi_3 S_3) C \end{aligned}$$

est la transformation

$$\begin{aligned} \varphi'_0 &= \varphi_1 & \varphi'_2 &= \varphi_3 \\ \varphi'_1 &= \varphi_0 & \varphi'_3 &= \varphi_2 \end{aligned}$$

qui échange les indices 01 et 23. La matrice correspondante est la matrice S_α d'Eddington. De même

$$\begin{aligned} \varphi' &= D_1 \varphi = D_1 (\varphi_0 + \varphi_1 S_1 + \varphi_2 S_2 + \varphi_3 S_3) C \\ &= (\varphi_0 + \varphi_1 S_1 - \varphi_2 S_2 - \varphi_3 S_3) C \end{aligned}$$

est la transformation

$$\begin{aligned} \varphi'_0 &= \varphi_0 & \varphi'_2 &= -\varphi_2 \\ \varphi'_1 &= \varphi_1 & \varphi'_3 &= -\varphi_3 \end{aligned}$$

représentée par la matrice diagonale

$$D_\alpha = (1, 1, -1, -1).$$

Pentades. — Théorème d'Eddington.

Si on multiplie une des six unités quaternioniques

$$A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad B_1 \quad B_2 \quad B_3$$

par l'une d'elles, B_3 par exemple, on obtient cinq unités qui anticommuent deux à deux et forment ce qu'Eddington appelle une pentade. Trois de ces unités ont pour carré plus un, deux ont pour carré moins un. Introduisons un facteur algébrique i , de carré moins un, nous pouvons faire en sorte que tous les carrés deviennent égaux à moins un.

Soit par exemple

$$E_1 = A_1 B_3 i$$

$$E_2 = A_2 B_3 i$$

$$E_3 = A_3 B_3 i$$

$$E_4 = B_1$$

$$E_5 = B_2$$

on a

$$\begin{aligned} E_1 E_2 E_3 E_4 E_5 &= i \\ E_k^2 &= -1 \end{aligned}$$

Les produits de deux E différents changent de signe avec l'ordre des facteurs, et nous écrivons

$$E_{kl} = -E_{lk} = E_k E_l = -E_l E_k \quad (k \neq l).$$

Les cinq E_k avec les dix E_{kl} et l'unité principale fournissent une notation des unités quadriquaternelles.

La partie

$$\Pi T = \sum_{\mu=1}^5 t_{\mu} E_{\mu}$$

s'appelle une partie pentadique. C'est la partie pentadique correspondant au quaternion

$$B_3 = E_{45}.$$

Il y a six pentades distinctes correspondant à chacune des unités A et B . Le quadriquaternion est

$$T = t_0 + \sum_{\mu} t_{\mu} E_{\mu} + \sum_{\mu < \nu} t_{\mu\nu} E_{\mu\nu}.$$

Si nous formons

$$T E_{45} = T B_3,$$

la partie algébrique t_0 et la partie pentadique fournissent les unités

$$A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad B_1 \quad B_2 \quad B_3$$

c'est-à-dire la partie antisymétrique de

$$T E_{45}$$

égale à moins son transposé.

Lorsque T est factorisable, Eddington l'écrit J et les composantes sont aussi désignées par la lettre j . On a

$$J = \Psi X^* = \Psi C X^*.$$

Multiplions par E_{45} , isolons la partie antisymétrique et multiplions à nouveau par $-E_{45}$, nous obtenons

$$j_0 + \Pi J = \frac{1}{2}(J - E_{45} X C \Psi E_{45}),$$

puisque le transposé de J est

$$X C \Psi.$$

Multiplions cette équation (à droite) par le facteur

$$\Psi = \Psi C$$

et observons que

$$J \Psi C = \Psi C X \Psi C = \Psi (X, \Psi) C = 4 j_0 \Psi$$

et

$$C \Psi E_{45} \Psi C = C x C = x C,$$

où x est un nombre ordinaire.

Transposons en remarquant que

$$E_{45} = B_3$$

est antisymétrique, il vient

$$x C = -x C$$

d'où

$$x = 0,$$

d'où finalement

$$\Pi J \Psi = j_0 \Psi,$$

soit

$$(j_1 E_1 + j_2 E_2 + j_3 E_3 + j_4 E_4 + j_5 E_5 - j_0) \Psi = 0.$$

Nous avons ainsi obtenu l'équation 5,43 qui est la base de l'interprétation que donne Eddington à l'équation de Dirac.

Relations entre les composantes d'un quadriquaternion factorisable.

Les notations que nous avons introduites apportent quelques simplifications à l'établissement des relations qui existent entre les composantes d'un quadriquaternion factorisable.

Si nous multiplions à droite l'équation de Dirac

$$(\Sigma j_{\mu} E_{\mu} - j_0) \Psi = 0$$

par

$$CX^*$$

et remarquons que

$$\Psi CX^* = J = j_0 + \Sigma j_{\mu} E_{\mu} + \Sigma j_{\mu\nu} E_{\mu\nu},$$

il vient

$$(\Sigma j_{\mu} E_{\mu})^2 - j_0^2 + (\Sigma j_{\mu} E_{\mu} - j_0) \Sigma j_{\mu\nu} E_{\mu\nu} = 0.$$

Les premiers termes se détruisent ; en effet

$$j_0^2 + \Sigma j_{\mu}^2 = 0,$$

équation qui se démontre en multipliant à gauche l'équation de Dirac par

$$j_0 + \Sigma j_{\mu} E_{\mu},$$

et observant que

$$x\Psi = 0,$$

où x est algébrique, entraîne

$$x = 0.$$

Il reste donc

$$(\Sigma j_{\mu} E_{\mu} - j_0) \Sigma j_{\mu\nu} E_{\mu\nu} = 0,$$

équation qui doit être satisfaite identiquement et fournit pour les termes en E_{μ}

$$\sum_{\mu=1}^5 j_{\mu} j_{\mu\nu} = 0,$$

et pour les termes en $E_{\mu\nu}$, observant que

$$E_{\mu} E_{\nu\sigma} = i E_{\tau\rho},$$

où

$$\mu\nu\sigma\tau\rho$$

est une permutation paire de 1, 2, 3, 4, 5

$$j_{\mu} j_{\nu\sigma} + j_{\nu} j_{\sigma\mu} + j_{\sigma} j_{\mu\nu} + i j_0 j_{\tau\rho} = 0.$$

Nous voyons donc que toute la théorie peut se développer en calcul symbolique sans qu'il soit nécessaire d'introduire de représentation particulière.

Théorie du mouvement gyroscopique des projectiles

Le mouvement gyroscopique élémentaire

Essai d'interprétation physique

PAR

M. ROBERT D'ADHÉMAR

(Suite)

8. LE SENS D'ORIENTATION ET LA DÉFINITION DE L'ÉCART.

Il est avantageux de fixer le sens d'orientation d'après le sens des rayures. Je suppose toujours la rayure à gauche et je prends pour sens d'orientation le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre.

Considérons l'écart δ . Cet écart est nul, à la bouche, si le tube est en très bon état. Mais actuellement je dois laisser de côté les phénomènes initiaux et je dois m'occuper des valeurs nulles, ou presque nulles, de l'écart, au moment du passage du mouvement de révolution au mouvement d'oscillation.

Je suppose : $\delta = 0$, à l'instant t_1 ; il faut distinguer deux cas.

Premier cas. — Je suppose que l'écart passe par la valeur zéro et reste positif. Je suppose que δ a un *minimum* proprement dit, au point zéro, c'est-à-dire :

$$\delta' = 0, \quad \delta'' > 0.$$

La courbe (a) aura un *point de rebroussement* (Fig. 4 et 5), car le point a arrive au point O, dans le plan OHN, et revient en arrière. La courbe (α) ne traverse pas le point O.

J'exclus actuellement cette circonstance, qui peut être réalisée pendant la période d'irrégularité initiale, mais qui, plus loin sur la trajectoire, correspondrait à des perturbations anormales.

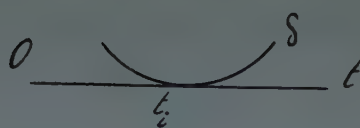


FIG. 4.

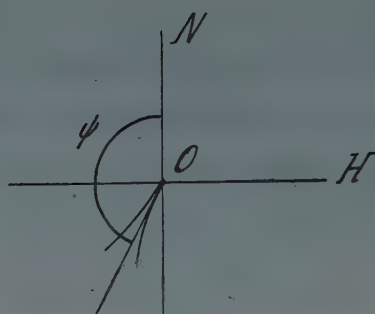


FIG. 5.

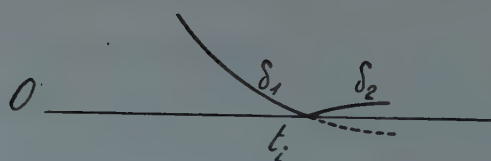


FIG. 6.

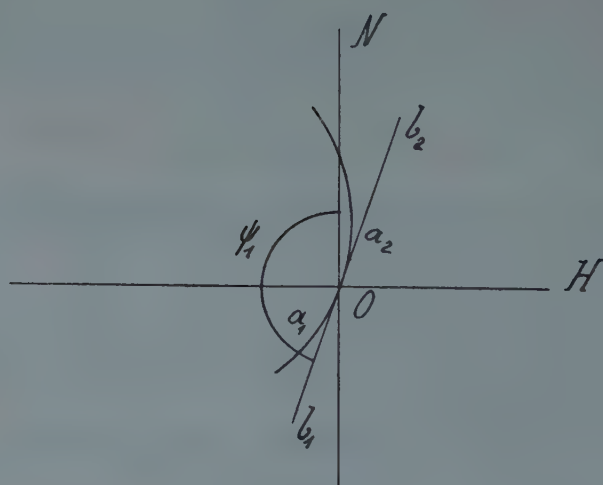


FIG. 7.

Deuxième cas. — Je suppose que la courbe (a) traverse le point O , dans le plan de référence OHN , à l'instant t_i . Si le paramètre d'Euler ψ reste continu, δ devient négatif. Ceci paraît tout simple : δ est une variable algébrique, qui devient négative (Fig. 6).

Mais, en réalité, il y a là une source de complications. Considérons deux points a_1 et a_2 , infiniment voisins de O , c'est-à-dire se rapprochant indéfiniment de l'origine O dans le plan OHN (Fig. 7 et 8).

A la limite, les plans de résistance correspondant à ces deux points sont confondus. Par suite, les axes Gx , correspondant à ces deux points, sont confondus. Considérons le moment de la poussée R_1 correspondant au point a_1 . A la limite, lorsque a_1 vient en O , ce moment est porté par le demi-axe Gx (par définition). De même, à la limite, lorsque a_2 vient en O ,

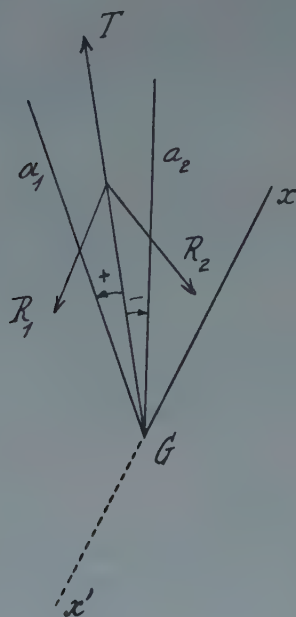


FIG. 8.

le moment de R_2 serait encore porté par le demi-axe Gx , si nous renverrions le sens d'orientation.

Mais il serait inopportun et inefficace de modifier brusquement le sens d'orientation adopté antérieurement.

Conservons toujours le même sens d'orientation. Alors, à la limite, lorsque a_2 vient en O , le moment de R_2 sera porté par le demi-axe Gx' , prolongement de Gx .

Nous avons donc une *discontinuité* pour le demi-axe Gx . Les discontinuités étant inévitables, il est extrêmement avantageux de donner à ψ une *discontinuité*, égale à π , lorsque la courbe (a) traverse l'origine O , et de regarder l'écart comme étant *essentiellement positif* (ou nul). Dans ces

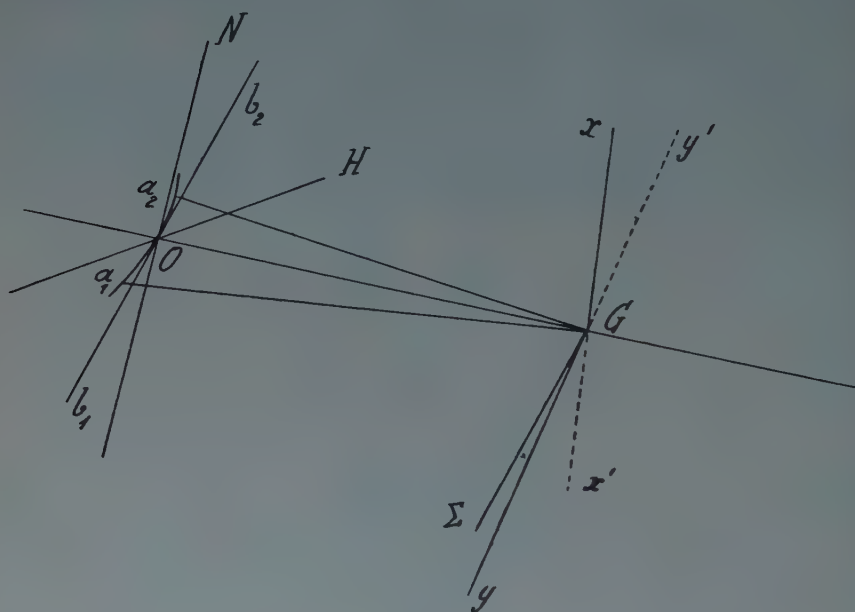


FIG. 9.

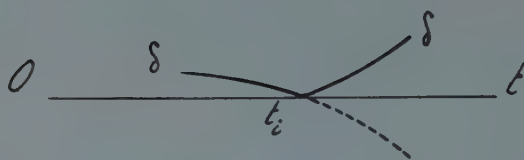


FIG. 10.

conditions, δ correspond à une rotation positive autour du demi-axe Gx , et ce demi-axe est renversé, à l'instant t_i .

On pourrait dire que δ n'est pas une *variable algébrique*, que δ est une *variable orientée*. Nous conservons toujours le même sens d'orientation et l'on a :

$$(34) \quad \delta \geq 0.$$

Je suppose : $\delta = 0$, à l'instant t_i , mais le point zéro n'est pas un

minimum proprement dit ; nous avons :

$$(35) \quad \delta' \neq 0, \quad \text{à l'instant } t_i.$$

Soit t_1 un instant infiniment voisin de t_i , et antérieur ; soit t_2 un instant infiniment voisin de t_i , et postérieur. Soit δ_1 et δ_2 les valeurs correspondantes de δ ; nous avons :

$$(36) \quad \lim \delta_1 = \lim \delta_2 = 0.$$

Considérons la courbe $\delta(t)$ représentant δ regardé comme étant une variable algébrique (ψ continu), et la courbe $\delta(t)$ représentant l'écart regardé comme étant une variable orientée (ψ discontinu). Nous passons de l'une à l'autre, à l'instant t_i , en substituant à la première courbe la courbe *symétrique* par rapport à l'axe Ot . L'écart étant essentiellement positif, nous ne pouvons plus parler de la *continuité* des dérivées successives de δ , à l'instant t_i .

Il faut introduire la notion de *régularité*. Je dirai que la dérivée d'ordre n est régulière, à l'instant t_i , si l'on a :

$$(37) \quad \lim \left(\frac{d^n \delta_1}{dt^n} + \frac{d^n \delta_2}{dt^n} \right) = 0.$$

Pour abrégé, je dirai que les limites des dérivées sont *symétriques* par rapport à zéro. Encore plus simplement, je dirai que les dérivées sont *symétriques*, à l'instant t_i .

Avec cette définition de δ , si nous supposons que δ varie, à l'instant t_i , très normalement, les dérivées à gauche et à droite *ne sont pas égales*, mais elles sont *opposées*, c'est-à-dire symétriques par rapport à zéro.

Résumé. — La courbe (a) traverse l'origine O , à l'instant t_i ; on a :

$$\delta = 0, \quad \delta' \neq 0, \quad \text{à l'instant } t_i.$$

Le sens d'orientation est toujours le même ; on a toujours : $\delta \geq 0$.

A la notion de continuité des dérivées de $\delta(t)$ doit être substituée la notion de *régularité*, exprimée par la relation (37).

Regardons les axes fondamentaux (Fig. 9). L'axe Gz coïncide avec l'axe de figure (vers le culot). Le demi-axe Gx porte le moment de la poussée, et Gy est dans le plan de résistance. Considérons un autre axe, dans le plan de résistance, $G\Sigma$, qui est perpendiculaire sur la tangente. L'angle ΣGy est égal à δ , et $G\Sigma$ est parallèle à Oa_1 , a_1 étant la trace de l'axe de figure dans le plan OHN .

Lorsque δ tend vers zéro, la limite de Oa_1 est la tangente Ob_1 .

Si δ tend vers zéro, à la limite les deux axes $G\Sigma$ et Gy sont *confondus*.

Donc lorsque le point a_1 vient se confondre avec l'origine O , le demi-axe Gy devient parallèle à Ob_1 . Et lorsque le point a_2 vient se confondre avec O , le demi-axe Gy devient parallèle à Ob_2 .

Lorsque t atteint la valeur t_i , en croissant, et dépasse t_i , le demi-axe Gy est brusquement remplacé par son *prolongement* Gy' . Nous savons aussi que, dans ces conditions, le demi-axe Gx est brusquement remplacé par son *prolongement* Gx' .

En même temps, ψ_1 est brusquement remplacé par ψ_2 , et l'on a :

$$(38) \quad \psi_2 = \psi_1 + \pi.$$

Telles sont les *discontinuités* qui se produisent lorsque t passe par la valeur t_i , en croissant, lorsque le point a traverse l'origine O .

Il est indispensable de préciser la définition de δ , et le sens d'orientation doit être fixé sans ambiguïté. Il serait étrange de modifier, à l'instant t_i , le sens d'orientation antérieurement adopté.

À l'instant t_i , la courbe $\delta(t)$ a une *pointe* et la courbe a la forme représentée dans la figure 6, ou bien la forme représentée dans la figure 10.

Ces diverses discontinuités proviennent d'un artifice, pourrait-on dire. Mais *cet artifice est imposé* par une *raison majeure* : il est utile de ne jamais modifier le sens d'orientation.

9. ÉTUDE DE LA VALEUR ZÉRO DE L'ÉCART. SINGULARITÉS APPARENTES ET SINGULARITÉS RÉELLES.

Je suppose l'écart nul, à l'instant t_i , au moment du passage du mouvement de révolution au mouvement d'oscillation. Nous savons que le paramètre d'Euler ψ éprouve une discontinuité à l'instant t_i .

Soit t_1 un instant infiniment voisin de t_i et antérieur.

Soit t_2 un instant infiniment voisin de t_i et postérieur.

Soient ψ_1 et ψ_2 les valeurs correspondantes de ψ , on a :

$$(38) \quad \lim (\psi_2 - \psi_1) = \pi.$$

Autour de l'instant t_i on a : $\psi' \geq 0$ (Fig. 7) (l'accent désigne toujours la dérivée par rapport à t).

Cette discontinuité de ψ est un fait géométrique artificiel, qui ne correspond pas nécessairement à une singularité véritable. Il faudra donc faire la distinction entre les *singularités apparentes* et les *singularités réelles*. Auparavant je dois rappeler les hypothèses essentielles.

Je suppose : $\rho = \text{const.}$ Ceci, pour un bon projectile, ne crée aucune difficulté.

Je suppose que la trajectoire plane est une bonne approximation de la trajectoire vraie, en particulier que l'on peut substituer τ à θ , après la période d'irrégularité initiale.

Je suppose la dérivation négligeable. En particulier, je suppose que l'on a :

$$\eta' = \eta'' = 0, \quad \text{à l'instant } t_i, \quad \text{avec } \delta = 0.$$

Enfin je suppose que la valeur zéro de l'écart, à l'instant t_i , n'est pas un minimum proprement dit ; la dérivée δ' n'est pas nulle.

J'ai supposé que l'on a : $\rho = \text{const.}$ et $\mathbf{M}_x = 0$, après la période d'irrégularité initiale. Cela doit être exact, à peu près, pour un bon projectile.

Si nous connaissions la dérivée $\frac{d\rho}{dt}$, il serait facile d'en tenir compte, mais les calculs seraient un peu plus longs.

Nous savons que, à l'instant t_i , les axes Gx et Gy sont renversés. Le demi-axe Gx vient sur son prolongement Gx' , et le demi-axe Gy vient sur son prolongement Gy' . Soit un paramètre quelconque X , porté sur Gx . Soit X_1 sa valeur à l'instant t_1 , et soit X_2 sa valeur à l'instant t_2 . Supposons ces valeurs symétriques :

$$X_2 = -X_1.$$

Alors la singularité de X est apparente, non réelle, car l'extrémité du segment X occupe la même position dans l'espace, aux instants t_1 et t_2 .

Au contraire, si l'on a :

$$X_2 + X_1 \neq 0,$$

la singularité est réelle. En effet, l'extrémité du segment X est alors déplacée dans l'espace, quand on passe de l'instant t_1 à l'instant t_2 .

Considérons l'écart. Je conserve toujours le même sens d'orientation ; on a : $\delta \geq 0$.

Je suppose : $\delta = 0$, à l'instant t_i .

Je suppose les dérivées premières symétriques :

$$\delta'_2 + \delta'_1 = 0.$$

Prenons l'expression de p :

$$p = \delta' - J \cos \psi.$$

D'après la relation (38), les valeurs de $J \cos \psi$ sont symétriques. Donc les valeurs de p sont symétriques. La singularité de p est apparente, non réelle. La singularité serait réelle, si les dérivées premières n'étaient pas symétriques.

Prenons l'expression de q :

$$q = \psi' \delta + J \sin \psi.$$

Nous avons : $\psi' \delta = 0$, à l'instant t_i .

Donc les valeurs de q , aux instants t_1 et t_2 , sont symétriques ; la singularité de q est apparente.

Considérons la première équation (5) du théorème du moment cinétique, et mettons-la sous cette forme :

$$(39) \quad \delta x^2 - \omega \delta x + \omega P \delta + \lambda = 0,$$

en posant :

$$(40) \quad \lambda \equiv -\omega J \sin \psi - \delta'' + J' \cos \psi.$$

Je suppose : $\lambda \neq 0$, $\delta \neq 0$.

Nous pouvons alors adopter la forme suivante :

$$(41) \quad x^2 - \omega x + \omega P + \frac{\lambda}{\delta} = 0.$$

Il faut voir ce qui a lieu, lorsque δ tend vers zéro.

Les solutions de l'équation du second degré (41) sont données par la formule :

$$(42) \quad 2x = \omega \pm \sqrt{\omega^2 - 4\omega P - 4\frac{\lambda}{\delta}}.$$

Lorsque δ tend vers zéro, la solution positive est donnée par la formule :

$$(43) \quad \lim x = \lim + \sqrt{-\frac{\lambda}{\delta}}.$$

Nous devons avoir : $-\lambda > 0$ et non nul.

Posons : $-\lambda = \Lambda^2 > 0$ et non nul.

Faisons immédiatement une remarque. Nous avons, à l'instant t_1 ,

$$\lambda_1 = -\omega J \sin \psi_1 - \delta_1'' + J' \cos \psi_1,$$

et, à l'instant t_2 :

$$\lambda_2 = -\omega J \sin \psi_2 - \delta_2'' + J' \cos \psi_2.$$

Si les dérivées secondes de δ sont symétriques, nous avons :

$$\delta_2'' = -\delta_1''.$$

Il en résulte que λ_1 et λ_2 sont symétriques. Par suite, l'un des deux est positif, ce qui est inacceptable.

Donc la solution : $\psi' = +\infty$ existe seulement dans le cas où les dérivées secondes de δ ne sont pas symétriques :

$$\delta_2'' + \delta_1'' \neq 0.$$

Nous devons exclure ici le cas suivant :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0,$$

qui sera examiné plus tard.

Je rappelle que j'ai exclu les minima proprement dits de l'écart. Nous avons donc :

$$\lim \delta_1' \neq 0 \text{ lorsque } t_1 \text{ tend vers } t_i,$$

$$\lim \delta_2' \neq 0 \text{ lorsque } t_2 \text{ tend vers } t_i,$$

ou bien, d'une manière symbolique :

$$\delta' \neq 0 \text{ à l'instant } t_i.$$

De même, la formule (43) condense d'une manière symbolique deux relations :

$$\lim \psi'_1 = \lim \frac{\Lambda_1}{\sqrt{\delta}} = +\infty,$$

$$\lim \psi'_2 = \lim \frac{\Lambda_2}{\sqrt{\delta}} = +\infty.$$

Nous pourrions écrire, pour simplifier :

$$\psi'_1 = +\infty \text{ et } \psi'_2 = +\infty.$$

De même, pour exprimer la symétrie, j'écris, par exemple :

$$\delta'_2 + \delta'_1 = 0.$$

Il faudrait écrire, plus correctement :

$$\lim (\delta'_2 + \delta'_1) = 0.$$

Considérons l'équation provenant de la dérivation, par rapport à t , de l'équation (5) :

$$(44) \left\{ \begin{array}{ccccccc} \delta' \psi'^2 & - \omega \delta' \psi' & + \omega P \delta' & - \omega J \cos \psi \cdot \psi' & - \delta'' & - J' \sin \psi \cdot \psi' & \\ + 2\delta \psi' \psi'' & - \omega \delta \psi'' & + \omega P' \delta & - \omega J' \sin \psi & & + J'' \cos \psi & \end{array} \right\} = 0$$

A B C D

Cette équation se décompose en plusieurs équations, par la séparation des termes infiniment grands de divers ordres. J'écrirai ces équations, sans distinguer t_1 et t_2 .

Dans l'application, il faudra examiner séparément les deux cas : $t = t_1$ et $t = t_2$.

Il faut remarquer que l'ensemble des termes des colonnes B et D donne : $-\omega q'$.

Dans la colonne C, le terme $\omega P' \delta$ est nul, à l'instant t_i .

Lorsque t tend vers t_i , ψ' devient infini, de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{\delta}}$, et ψ'^2 devient infini de l'ordre de $\frac{1}{\delta}$.

Les termes de la colonne A sont donc de l'ordre de $\frac{1}{\delta}$; ce sont les termes du plus grand ordre. Nous avons donc :

$$(45) \quad \lim_{\delta=0} (\delta' \psi'^2 + 2\delta \psi' \psi'') = 0.$$

Posons, pour simplifier :

$$(46) \quad \delta' \psi' + 2 \delta \psi'' = 0.$$

Lorsque t tend vers t_1 , $\delta \psi''$ devient infini et est du même ordre que ψ' . Prenons maintenant l'ensemble des termes qui sont du même ordre que ψ' , lorsque t tend vers t_1 .

Nous écrirons (en omettant le symbole *lim*) :

$$(47) \quad -\omega (\psi' \delta' + \psi'' \delta) - \omega J \cos \psi \cdot \psi' - J' \sin \psi \cdot \psi' = 0,$$

c'est-à-dire :

$$(48) \quad \begin{aligned} \omega (q' - J' \sin \psi) + J' \sin \psi \cdot \psi' &= 0, \\ q' - J' \sin \psi &= -\frac{J'}{\omega} \sin \psi \cdot \psi'. \end{aligned}$$

Prenons maintenant l'ensemble des termes finis, nous avons :

$$(49) \quad \omega P \delta' - \delta''' - \omega J' \sin \psi + J'' \cos \psi = 0.$$

Ceci définit δ'' , si δ' est donné, à l'instant t_1 et à l'instant t_2 .

Il faut étudier la relation (48), qui donne les valeurs de q' , aux instants t_1 et t_2 , lorsque t_1 et t_2 tendent vers t_1 .

Nous voyons que q' devient infini, comme ψ' , lorsque δ tend vers zéro, si l'on a :

$$\sin \psi \neq 0, \text{ c'est-à-dire } \psi_1 \neq \pi \text{ et } \psi_2 \neq 2\pi.$$

Nous supposons essentiellement que δ' est fini, non nul.

Supposons : $p \neq 0$; p est fini, non nul.

L'expression $p (\omega - \psi')$ devient infinie, comme ψ' , lorsque δ tend vers zéro.

Supposons donc : $\sin \psi \neq 0$ et $p \neq 0$.

Alors \mathbf{M}_y devient *infini*, en général, lorsque δ tend vers zéro. Je dis « en général », parce que \mathbf{M}_y est la somme de deux termes infinis, somme qui pourrait, par exception, être finie.

Mais il me paraît inutile actuellement de faire une discussion, à ce sujet, parce que si l'on a : $\sin \psi \neq 0$ avec $\delta = 0$, l'hypothèse : $\eta' = \eta'' = 0$ pour $\delta = 0$ pourrait être inacceptable.

Le cas normal est le suivant : $\psi_1 = \pi$, $\psi_2 = 2\pi$.

L'axe de figure reste alors à gauche du plan vertical contenant la tangente de la trajectoire. La dérivation est alors régulière, et il est plus facile d'admettre qu'elle est négligeable (je suppose toujours la rayure à gauche).

En outre, si \mathbf{M}_y était infini, l'interprétation physique serait difficile et il serait difficile d'admettre que la trajectoire plane est encore une approximation suffisante de la trajectoire vraie.

Par exemple, la substitution de τ' à θ' peut devenir inacceptable, si le mouvement gyroscopique devient anormal.

N'ayant aucune donnée d'ordre physique sur \mathbf{M}_y , je dois examiner, à priori, tous les cas possibles, mais je laisse actuellement de côté les valeurs infinies de \mathbf{M}_y , qui, vraisemblablement, sont dépourvues de sens, au point de vue de la Mécanique.

Je supposerai donc :

$$\lim \psi_1 = \pi, \quad \lim \psi_2 = 2\pi, \quad \lim p = 0.$$

Je conserve, naturellement, l'hypothèse : $\delta' \neq 0$.

Considérons l'expression : $X = \sin \psi \cdot \psi'$.

Il faut chercher la limite de X , lorsque ψ tend vers π , ou vers 2π . Nous avons :

$$(43) \quad \lim \psi' = \lim \frac{\Lambda}{\sqrt{\delta}},$$

$$(50) \quad \lim X = \lim \Lambda \frac{\sin \psi}{\sqrt{\delta}}.$$

Il faut chercher la limite de $\frac{\sin \psi}{\sqrt{\delta}}$.

Appliquons la Règle dite de l'Hospital ; nous devons chercher la limite de :

$$\frac{\cos \psi \cdot \psi'}{\frac{1}{2\sqrt{\delta}} \delta'},$$

ou bien de :

$$\frac{2 \cos \psi}{\delta'} \Lambda.$$

Par suite nous avons :

$$(51) \quad \lim X = \lim \frac{2 \cos \psi}{\delta'} (-\Lambda).$$

Posons :

$$\Delta'_1 = \lim \delta'_1 \quad \text{lorsque } t_1 \text{ tend vers } t_i,$$

$$\Delta''_1 = \lim \delta''_1 \quad \text{» » ,}$$

$$\Delta'_2 = \lim \delta'_2 \quad \text{lorsque } t_2 \text{ tend vers } t_i,$$

$$\Delta''_2 = \lim \delta''_2 \quad \text{» » .}$$

Nous avons :

$$\lim \cos \psi_1 = -1, \quad \lim \cos \psi_2 = 1,$$

$$\lim \lambda_1 = -\Delta_1'' - J' < 0, \lim \lambda_2 = -\Delta_2'' + J' < 0,$$

$$(52) \quad \lim X = -\frac{2}{\Delta_1'} (\Delta_1'' + J'), \text{ lorsque } t_1 \text{ tend vers } t_i,$$

$$(53) \quad \lim X = \frac{2}{\Delta_2'} (\Delta_2'' - J'), \text{ lorsque } t_2 \text{ tend vers } t_i.$$

Je suppose la dérivée première de δ *régulière* : nous avons :

$$\Delta_2' = -\Delta_1', \quad \frac{2}{\Delta_2'} = -\frac{2}{\Delta_1'}.$$

La dérivée seconde est nécessairement *irrégulière*, car nous devons avoir : $\Delta_1'' + J' > 0$ et $\Delta_2'' - J' > 0$.

Si l'on avait : $\Delta_2'' = -\Delta_1''$, l'une de ces deux sommes serait positive, et l'autre serait négative.

Nous avons finalement :

$$(54) \quad \lim q' = D (\Delta_1' + J'), \text{ lorsque } t_1 \text{ tend vers } t_i,$$

$$(55) \quad \lim q' = D (\Delta_2'' - J'), \text{ lorsque } t_2 \text{ tend vers } t_i,$$

$$\text{en posant : } D = \frac{J'}{\omega} \frac{2}{\Delta_1'}.$$

Les deux limites de q' ne sont pas symétriques ; elles sont de même signe. Par suite, ψ' étant infini, la fonction q' est *irrégulière*.

Examinons maintenant le second terme du deuxième moment :

$$-p (\omega - \psi').$$

Nous supposons que p est symétrique et tend vers zéro lorsque t tend vers t_i c'est-à-dire :

$$\lim (\delta_1' - J \cos \psi_1) = 0, \quad \text{ou} \quad \Delta_1' + J = 0,$$

$$\lim (\delta_2' - J \cos \psi_2) = 0, \quad \text{ou} \quad \Delta_2' - J = 0,$$

de sorte que l'on a :

$$D = \frac{-2}{\omega} \frac{J'}{J}.$$

Il faut chercher la limite de l'expression : $(\delta' - J \cos \psi) \psi'$, ou de :

$$(\delta' - J \cos \psi) \frac{\Lambda}{\sqrt{\delta}}.$$

Appliquons la Règle dite de l'Hospital : nous trouvons, à une constante près : $\lim \sin \psi$.

La limite est donc nulle lorsque t_1 tend vers t_i et lorsque t_2 tend vers t_i .

En résumé, si l'on a :

$$\lim \sin \psi = 0, \quad \lim p = 0.$$

il en résultera :

$$(56) \quad \lim \mathbf{M}_y = \mathbf{B} \lim q'.$$

Les limites de $\frac{dq}{dt}$ sont données par les formules (54) et (55).

Écrivons l'expression générale de p' :

$$(57) \quad p' = \delta'' - J' \cos \psi + J \sin \psi \cdot \psi'.$$

Nous connaissons la limite de X , lorsque t_1 tend vers t_i et lorsque t_2 tend vers t_i . Cela donne :

$$(58) \quad \lim p' = 3 (\Delta_1'' + J') > 0, \text{ lorsque } t_1 \text{ tend vers } t_i,$$

$$(59) \quad \lim p' = 3 (\Delta_2'' - J') > 0, \text{ lorsque } t_2 \text{ tend vers } t_i.$$

Cette dérivée p' est portée par Gx , tandis que la dérivée q' est portée par Gy .

Nous voyons que, ψ' étant infini, la fonction p' est *irrégulière*.

En rassemblant tout ce qui précède, nous voyons que l'on a :

$$\lim \psi_1' = +\infty, \quad \lim \psi_2' = +\infty,$$

$$\lim \mathbf{M}_y^1 \text{ finie}, \quad \lim \mathbf{M}_y^2 \text{ finie}.$$

La fonction \mathbf{M}_y sera irrégulière, à l'instant t_i .

Nous aurons aussi :

$$p = q = 0, \quad \text{à l'instant } t_i.$$

Les fonctions p' et q' sont irrégulières, à l'instant t_i .

Les deux limites de p' sont positives, non nulles.

Les équations de Mayevski n'ont aucun sens, à l'instant t_i .

Avec les conditions que nous avons fixées, nous avons :

$$\lim \mathbf{M}_y = \mathbf{B} \lim q',$$

et

$$\Delta_1' = -J.$$

Par suite, la constante D est extrêmement petite par rapport à 1 (en valeur absolue). En effet, le nombre $\frac{2}{w}$ est très petit. D'autre part, le rap-

port $\frac{J'}{J}$ est très petit par rapport à 1, car, à l'instant t_i nous sommes à une certaine distance de l'origine, sur la trajectoire.

Posons : $\Delta_1'' + J' = h_1$; h_1 est positif, non nul.

Supposons h_1 très voisin de zéro, ce qui n'est pas en contradiction avec les autres données.

Dans ces conditions, $\lim \mathbf{M}_y^1$ sera un nombre très voisin de zéro.

Nous savons, d'autre part, que l'on a : $\lim \mathbf{M}_x^1 = 0$.

Par suite, t étant très voisin de t_i et moindre que t_i , \mathbf{M}_x et \mathbf{M}_y sont très voisins de zéro, si h_1 est très voisin de zéro.

Dans ces conditions, le projectile est en état d'instabilité virtuelle, pour les valeurs de t très voisines de t_i et moindres que t_i .

En effet, supposons qu'une très petite *perturbation* intervienne brusquement. Supposons que le moment perturbateur \mathbf{N} soit de l'ordre de \mathbf{M}_y .

Ce moment perturbateur aura un effet appréciable sur le mouvement gyroscopique, tandis que le même moment aurait un effet négligeable, si les valeurs de \mathbf{M}_x et \mathbf{M}_y n'étaient pas très voisines de zéro.

Cette circonstance caractérise l'*instabilité virtuelle*.

Je supposerai maintenant que le projectile n'a été soumis à l'action d'aucune perturbation pour les valeurs de t voisines de t_i , et antérieures, mais je suppose qu'une perturbation minime intervienne brusquement à un instant extrêmement voisin de t_i , et postérieur.

Posons : $\Delta_2'' - J' = h_2 > 0$, non nul.

Supposons h_2 extrêmement voisin de zéro, ce qui n'est pas en contradiction avec les données antérieures.

Il en résulte que \mathbf{M}_y^2 tend vers une limite extrêmement voisine de zéro, lorsque t tend vers t_i .

Nous voyons immédiatement, par des considérations identiques à celles qui précèdent, qu'une perturbation minime peut, dans ces conditions, avoir un effet appréciable sur le mouvement gyroscopique. Donc nous sommes encore dans un état d'instabilité virtuelle, au voisinage postérieur de t_i , si h_2 est assez petit. Nous voyons le rôle considérable que jouent ces constantes h_1 et h_2 .

Il est entendu que Δ_1'' et Δ_2'' ne sont pas des nombres opposés, symétriques par rapport à zéro ; mais ils sont de signes contraires. Or nous avons :

$$(60) \quad \Delta_2'' > J' > 0.$$

Il en résulte :

$$\Delta_1'' < 0.$$

Et nous pouvons écrire :

$$(61) \quad 0 > \Delta_1'' > -J'.$$

Nous voyons que Δ_1'' varie dans des limites étroites ; au contraire, $\Delta_2'' - J'$ ou h_2 peut avoir une valeur positive quelconque (Fig. 11).

Si h_2 est assez grand par rapport à J' , la limite de p' , lorsque t_2 tend vers t_i , sera nettement plus grande que la limite de p' , lorsque t_1 tend vers t_i . Par suite, la variation de p pourra être forte, pour les valeurs de t voisines de t_i , et postérieures, si le nombre h_2 est assez grand. Si cette

circonstance est réalisée, ce sera une condition défavorable, au point de vue de la tenue du projectile. Je laisse de côté cette question, pour la reprendre ultérieurement. Il faudra probablement séparer la notion de stabilité de la notion de régularité. Le mot « stabilité » est employé, dans la Balistique, d'une manière assez confuse.

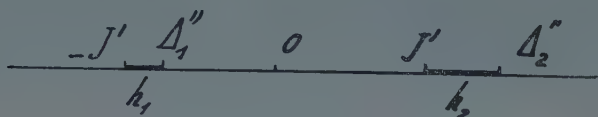


FIG. 11.

Si le nombre h_2 est assez grand, la valeur de p' est assez grande et la valeur de \mathbf{M}_y est assez grande, au voisinage postérieur de t_i . Coïncidence qui ne doit pas nous étonner. En effet, si le nombre h_2 est grand, c'est dire que l'irrégularité de δ'' est forte, à l'instant t_i .

Je résume. Les instants t_1 et t_2 sont infiniment voisins de t_i , le premier antérieur, le second postérieur. Si nous avons :

$$\lim \lambda_1 < 0, \text{ non nul,}$$

$$\lim \lambda_2 < 0, \text{ non nul,}$$

nous aurons :

$$\lim \psi'_1 = +\infty,$$

$$\lim \psi'_2 = +\infty.$$

Si l'on a, en outre :

$$\lim \psi_1 = \pi, \quad \lim \psi_2 = 2\pi, \quad \lim p = 0,$$

\mathbf{M}_y sera fini et irrégulier à l'instant t_i .

Si la constante h_1 est extrêmement voisine de zéro, nous avons un état d'*instabilité virtuelle* lorsque t est très voisin de t_i et antérieur. Si la constante h_2 est extrêmement voisine de zéro, nous avons un état d'*instabilité virtuelle* lorsque t est très voisin de t_i et postérieur.

J'ai examiné les faits qui correspondent à une dérivée seconde δ'' *irrégulière*. Je ne dis pas *discontinue*, parce que cela serait dépourvu de sens, en raison de la convention que j'ai faite, et qui s'impose, savoir : $\delta \geq 0$.

Il faut maintenant examiner un cas tout différent, qui est le suivant :

$$\lim \lambda_1 = \lim \lambda_2 = 0.$$

J'attire encore l'attention sur ce fait. Nous avons :

$$\lim \psi'_1 = \lim \psi'_2 = +\infty.$$

Donc les équations de Mayevski ne sont pas valables, à l'instant t_i .

10. ÉTUDE DE LA VALEUR ZÉRO DE L'ÉCART. LES ÉTATS D'INSTABILITÉ VIRTUELLE.

Je suppose maintenant que λ est nul à l'instant t_i ; plus exactement je suppose que l'on a :

$$\begin{aligned} \lim \lambda_1 &= 0, \quad \text{lorsque } t_1 \text{ tend vers } t_i \text{ en croissant,} \\ \lim \lambda_2 &= 0, \quad \text{lorsque } t_2 \text{ tend vers } t_i \text{ en décroissant.} \end{aligned}$$

Je pourrai dire, en abrégé :

$$\begin{aligned} \lambda &= 0, \quad \text{à gauche de } t_i, \\ \lambda &= 0, \quad \text{à droite de } t_i. \end{aligned}$$

Ce sera un langage simplifié, qui rappellera la discontinuité de ψ , et la convention fondamentale relative à l'écart : $\delta \geq 0$.

Je suppose aussi :

$$\lim \sin \psi = 0, \text{ à l'instant } t_i,$$

ou bien, en abrégé :

$$\begin{aligned} \psi &= \pi, \quad \text{à gauche de } t_i, \\ \psi &= 2\pi, \quad \text{à droite de } t_i. \end{aligned}$$

Cette hypothèse correspond à une certaine symétrie du mouvement gyroscopique par rapport à l'axe HOH'. Cette hypothèse n'est pas essentielle, probablement, mais l'axe de figure restant *du même côté*, par rapport au plan vertical qui contient la tangente de la trajectoire, cette hypothèse est en harmonie avec le fait de négliger la Dérivation. En particulier, je suppose l'effet de Dérivation nul, à l'instant t_i , et j'admets que l'on a :

$$(62) \quad \eta' = \eta'' = 0, \text{ avec } \delta = 0, \text{ à l'instant } t_i.$$

Nous avons donc :

$$\lim (-\delta'' + J' \cos \psi) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$(63) \quad -\Delta_1'' - J' = 0, \quad \text{et} \quad -\Delta_2'' + J' = 0.$$

La dérivée seconde de δ est régulière à l'instant t_i . Je suppose aussi que les dérivées δ' et δ''' sont régulières à l'instant t_i .

L'équation (5) prend alors la forme suivante :

$$(64) \quad \delta \psi'^2 - \omega \delta \psi' = 0.$$

Par suite, ψ' peut avoir une valeur finie quelconque, et, d'après la nature du mouvement gyroscopique, ψ' doit être positif ou nul, à l'instant t_i .

La solution est donc :

$$(65) \quad \psi' = E, \text{ à gauche et à droite de } t_i; \quad E \geq 0.$$

À l'instant t_i , $\sin \psi$ est nul ; nous avons donc : $q = 0$. D'autre part, δ est

nul et ψ' est fini ; la première équation du moment cinétique donne donc : $p' = 0$, à l'instant t_i . En général, p n'est pas nul à l'instant t_i .

Nous aurons : $p = 0$, à l'instant t_i , seulement dans un cas particulier, lorsque l'on a :

$$(66) \quad \Delta'_1 = -J, \quad \text{et} \quad \Delta'_2 = J.$$

Lorsque p n'est pas nul, il est inutile de chercher à représenter le mouvement gyroscopique par les équations de Mayevski.

Écrivons l'équation dérivée (44) à l'instant t_i , en faisant : $\sin \psi = \delta = 0$,

$$(67) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta' \psi'^2 + 2 \delta \psi' \psi'' \\ + \omega (\delta' \psi' + \delta \psi'' + J \cos \psi \cdot \psi') \\ + \omega P \delta' - \delta''' + J'' \cos \psi \end{array} \right\} = 0.$$

La deuxième ligne représente l'expression $-\omega q'$, lorsque $\sin \psi$ est nul, l'expression générale de q' étant :

$$q' = \psi' \delta' + \psi'' \delta + J \cos \psi \cdot \psi' + J' \sin \psi.$$

Remarquons que, dans l'équation (67), tous les termes sont remplacés par les termes symétriques, lorsque l'on passe de la gauche à la droite de t_i . En effet, les valeurs de ψ' sont identiques ; les valeurs de $\cos \psi$, de δ' , de δ''' sont opposées. Il en résulte que les valeurs de $\psi'' \delta$ sont opposées, ou symétriques.

L'équation (67) donne $\psi'' \delta$. Il suffit de la mettre sous la forme suivante :

$$(68) \quad (2 \psi' - \omega) \psi'' \delta + W = 0.$$

Je suppose d'abord : $2E - \omega \neq 0$.

Nous supposons essentiellement δ' et δ''' finis, de sorte que $\psi'' \delta$ aura une valeur finie, qui peut être nulle si l'on a : $W = 0$.

Je suppose maintenant : $2E - \omega = 0$, et $W \neq 0$.

La valeur de $\psi'' \delta$ sera infinie, et la valeur de \mathbf{M}_y sera infinie. Je mets de côté cette circonstance, dont l'interprétation physique paraît impossible.

Je suppose enfin que l'on a : $2E - \omega = W = 0$.

Dans ces conditions, $\psi'' \delta$ peut avoir une valeur finie quelconque ; il en résulte que la valeur de \mathbf{M}_y peut être nulle. Si cette circonstance est réalisée, nous avons, à l'instant t_i :

$$(69) \quad \mathbf{M}_x = \mathbf{M}_y = \mathbf{M}_z = 0.$$

D'après ce qui précède, c'est un état d'instabilité virtuelle, car un moment perturbateur \mathbf{N} donné, fini, très petit, aura une influence prépondérante, à l'instant t_i , sur le mouvement gyroscopique.

Je reprends l'étude du cas général : $2E - \omega \neq 0$. Nous pouvons calculer $\psi'' \delta$, qui aura une valeur finie, à l'instant t_i .

Ici, ψ' est une donnée : $\psi' = E$, à gauche et à droite de t_i . Il en résulte que $\psi''\delta$ est une fonction linéaire de δ' . Nous avons, d'ailleurs :

$$\mathbf{M}_y = \mathbf{B} [q' - p(\omega - \psi')].$$

Il en résulte que \mathbf{M}_y est une fonction linéaire de δ' :

$$(70) \quad \mathbf{M}_y = \mathbf{L}(\delta').$$

Par suite, la valeur finie de ψ' étant donnée, à l'instant t_i , il existe, en général, une valeur finie de δ' , telle que l'on ait :

$$\mathbf{M}_y = 0, \text{ à l'instant } t_i.$$

Dans ces conditions, nous avons un état d'instabilité virtuelle, à l'instant t_i .

Conclusion. — Les valeurs de δ' , δ'' , δ''' , de p , de q' sont symétriques à gauche et à droite de t_i ; au contraire, les valeurs de $(\omega - \psi')$ sont identiques. Il en résulte que les valeurs de \mathbf{M}_y sont symétriques, c'est-à-dire que la fonction \mathbf{M}_y est régulière, à l'instant t_i .

Dans mes travaux antérieurs, je n'avais pas assez précisé la définition de l'écart et j'avais omis de faire la distinction nécessaire entre les singularités réelles et les singularités apparentes.

L'étude de la valeur zéro de l'écart est fort importante parce qu'elle correspond à la valeur zéro du premier moment. Le premier moment étant nul, le deuxième moment devient *prépondérant*, en général. Et si, en même temps, le deuxième moment est nul, nous sommes en présence d'un *état d'instabilité virtuelle* du projectile.

Ces caractères essentiels de l'écart nul n'ont jamais été signalés et cette omission est aisément explicable.

Dans tous les travaux antérieurs, ou bien le deuxième moment est *négligé*, sans aucune justification, ou bien l'expression du deuxième moment est *fixée à priori*, sans aucune explication.

Exemple frappant d'un essai d'intuition, totalement dépourvu de fondement. J'avais d'abord adopté ces notions relatives au deuxième moment, et ensuite j'ai reconnu qu'elles sont inacceptables. J'ai employé exclusivement *les équations exactes*, que j'avais établies, relativement à ce mouvement gyroscopique, sans aucune idée *a priori* sur le deuxième moment. J'ai fait seulement une simplification en supprimant l'effet de Dérivation, à l'instant t_i , *simplification* qui est traduite par les relations (62).

Les équations de Mayevski et Burzio sont certes bien remarquables et précieuses, mais, au point de vue de l'étude concrète du mouvement gyroscopique, il faut essayer de voir les faits tels qu'ils sont, plutôt que de mutiler les faits pour leur imposer, de force, telle ou telle représentation analytique.

Le nombre E peut avoir une valeur quelconque, finie et positive. Si l'on n'a pas :

$$\frac{E}{\omega} = \beta(1),$$

il est clair que les équations de Mayevski ne sauraient être valables, à l'instant t_i .

En tous cas, le rôle des équations de Mayevski n'est pas bien considérable, lorsque l'écart est nul. Il est plus intéressant de chercher les conditions d'une *possibilité d'instabilité* du projectile.

Je me suis placé dans les conditions les plus simples, en supposant que l'on a :

$$\psi' = E, \text{ à gauche et à droite de } t_i.$$

La nature de la discontinuité de ψ nous autorise à supposer $\frac{d\psi}{dt}$ continu.

Nous pouvons aussi supposer que $\frac{d\psi}{dt}$ est fini et discontinu à l'instant t_i .

Supposons la dérivée $\psi'(t)$ finie et discontinue ; supposons les dérivées $\delta', \delta'', \delta'''$ régulières, à l'instant t_i ; la fonction M_y sera alors irrégulière.

11. LES PERTURBATIONS.

Nous sommes assez peu renseignés sur les perturbations qui produisent la dispersion du tir. Nous savons seulement qu'elles sont de nature très variée, en qualité et en quantité. Notre ignorance est d'autant plus grande que nous avons à considérer un *moment perturbateur*, et non une force. Dans ce qui nous occupe, il n'est pas toujours nécessaire de préciser la valeur numérique du moment perturbateur, mais, si c'était urgent, il faudrait avoir une indication.

Je ne parle pas des perturbations initiales à la bouche ; je parle de celles qui peuvent exister sur la trajectoire, après la prestabilisation.

Nous pouvons avoir une perturbation d'origine *interne*, par exemple un dévissage, plus ou moins complet, de la fusée, qui modifie les phénomènes aérodynamiques et les divers frottements.

Nous pouvons avoir une perturbation d'origine *externe*, par exemple une brusque variation des conditions atmosphériques. L'obus peut frôler une branche d'arbre.

Je ne parle pas des perturbations extraordinaires. Si l'obus entre dans un arbre ou dans un mur, c'est une perturbation forte.

Je regarde comme normales les perturbations faibles, et je cherche à les évaluer *grosso modo*.

Faisons d'abord une remarque. Nous avons :

$$(71) \quad M_x = B \omega P \delta.$$

Nous pouvons avoir, à peu près :

$$A = 250 a^5, \quad B = 2000 a^5.$$

Nous aurions, dans ces conditions :

$$a = \frac{1}{10}, \quad \frac{2}{10}, \quad \frac{1}{20};$$

$$B = \frac{2}{100}, \quad \frac{64}{100}, \quad \frac{1}{1600}.$$

Nous pouvons substituer l'étude de $\omega P\delta$ à celle de M_x , B étant une constante qui figure également dans M_y , et qui disparaît dans le rapport Θ .

Considérons le cercle de prestabilisation. Je suppose, pour prendre le cas le plus simple, que la période d'irrégularité initiale est très brève et qu'à la fin de cette période le mouvement gyroscopique devient un mouvement élémentaire, correspondant aux équations de Mayevski.

Dans ces conditions, nous avons approximativement, au terme de la période d'irrégularité initiale, un mouvement circulaire uniforme. Le point C, centre instantané de précession balistique, se trouve approximativement sur le demi-axe OH' , et l'on a : $OC = \frac{1}{Q}$.

La vitesse initiale étant grande, par exemple 600 ms, ou 800 ms, la valeur initiale Q_0 sera un grand nombre, de sorte que le point C restera presque confondu avec l'origine pendant un tour de précession balistique. Et ce tour sera effectué rapidement, la valeur de P_0 étant assez grande, par exemple 20 ou 30.

Le rayon μ est à peu près constant ; nous pouvons le nommer « module du mouvement élémentaire ». Quand on passe d'un coup au suivant, le module doit varier, mais il variera dans des limites étroites si les projectiles sont bons et si les départs sont normaux.

Je suppose, pour choisir les circonstances les plus simples, le mouvement élémentaire réalisé sur toute la trajectoire, en *réserve* seulement la zone qui comprend un écart nul, ou presque nul. Je suppose aussi que le module est le même, avant cette zone, et après cette zone.

Le mouvement élémentaire étant un mouvement très régulier, je le prends comme base de comparaison pour l'évaluation rapide des perturbations. Il est entendu que la zone *réserve* est exclue.

Je considère le mouvement élémentaire comme étant une sorte de *modèle de régularité*. Il y aurait beaucoup d'observations à faire, à ce sujet, car le mouvement élémentaire est obtenu par une approximation dont j'ai indiqué la nature exacte, la décomposition artificielle de la première équation du théorème du moment cinétique. Je reprendrai cette question ultérieurement.

Je suppose que l'on a : $\mu = \frac{1}{60}$, ce qui correspond, à peu près, à 1° .

C'est une valeur vraisemblable lorsque l'on a : $V_0 = 600$ ms.

Je suppose que l'on a, sur le cercle de prestabilisation : $P_0 = 25$. Si l'on prend : $\omega = 200$, c'est une valeur vraisemblable. Je prends des chiffres ronds, pour simplifier cet exposé.

Nous avons, dans ces conditions, sur le cercle de prestabilisation : $\omega P\delta = 83$,

La prestabilisation à une petite distance de la bouche, si elle est réalisée, est due à la résistance qu'oppose l'air aux brusques variations d'orientation de l'obus. Cet *amortissement* dépend de la nature du projectile et de la nature des perturbations initiales, et il est probable que les renseignements que l'on possède, à ce sujet, ne sont pas très nets. Lorsque je suppose la période d'instabilité initiale très brève, je suppose le projectile bien établi et le départ normal.

Je suppose toujours que nous sommes dans des conditions *moyennes* ; dans le cas contraire, il serait difficile d'obtenir quelque conclusion générale.

Il faut faire quelques observations à un autre point de vue. Le centre instantané de précession balistique C_0 étant tout voisin de l'origine O, j'ai admis, dans certains calculs, que les points C_0 et O sont rigoureusement confondus. Cette approximation, à certains points de vue, pourrait créer un malentendu.

Si, à la fin de la période d'instabilité initiale, le mouvement était *rigoureusement* un cercle ayant l'origine O pour centre, ce mouvement ne serait pas un mouvement élémentaire. Si l'on a, en effet :

$$(72) \quad \delta' \equiv 0,$$

il en résulte :

$$(73) \quad p = -J \cos \psi,$$

et l'on n'a pas pas :

$$p \equiv 0.$$

Si nous voulons avoir un mouvement gyroscopique élémentaire, considérons plutôt le premier mouvement de révolution, qui est approximativement un cercle dont C_0 est le centre. Nous avons alors :

$$p \equiv 0,$$

et approximativement :

$$(20) \quad q = P\delta.$$

$$(21) \quad \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} P\delta,$$

$$(32) \quad \Theta = \frac{1}{\omega} \left(\frac{\delta'}{\delta} + \frac{P'}{P} \right).$$

Nous avons, pour ce premier mouvement de révolution :

$$(74) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta \sim \mu \sim J_0, \\ \delta' = J \cos \psi, \\ \Theta \sim \frac{1}{\omega} \left(\cos \psi + \frac{P'}{P} \right). \end{array} \right.$$

Ce rapport est très petit par rapport à 1.

Donc $|M_y|$ est très petit par rapport à M_x , pendant le premier mouvement de révolution.

Pendant ce premier mouvement de révolution, nous savons, d'ailleurs, que l'approximation de la théorie élémentaire n'est pas parfaite.

Si l'on a, par exemple :

$$\frac{P_0}{\omega} \sim \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad \frac{\mu}{\delta} \sim 1,$$

le rapport $\frac{\psi'}{\omega}$ n'est pas très petit par rapport à 1.

Considérons maintenant un minimum de l'écart, assez voisin de zéro. Il faut voir d'abord si l'approximation de la Théorie élémentaire est bonne.

Dans ce but, examinons la formule (19) et la condition (30). Si la condition (30) n'est pas vérifiée, la formule (19) perd toute valeur, de sorte que l'emploi de la formule (19) nous renseignera sur la validité de la dite formule. Posons :

$$(75) \quad K \equiv \frac{P}{\omega} \frac{\mu}{\delta}.$$

Lorsque l'écart est minimum, pendant un mouvement de révolution, nous avons :

$$(76) \quad \frac{\psi'}{\omega} = K.$$

Lorsque l'écart est minimum, pendant un mouvement d'oscillation, nous avons :

$$(77) \quad \frac{\psi'}{\omega} = -K.$$

Je désigne par δ_m l'écart minimum. Prenons un minimum assez petit ; supposons, par exemple, que l'on ait :

$$(78) \quad \omega \delta_m = 1.$$

Nous avons alors :

$$(79) \quad K = P\mu.$$

J'ai pris : $\mu = \frac{1}{60}$, en supposant : $V_0 = 600$ ms.

J'aurais pris, par exemple : $\mu = \frac{1}{80}$, en supposant : $V_0 = 800$ ms.

Je prends toujours des chiffres ronds.

Je suppose que la valeur zéro de l'écart (bien entendu si elle est réalisée) correspond à la valeur : $P = 2$, approximativement. La valeur : $\delta_m = \frac{1}{\omega}$, pendant un mouvement de révolution, correspondra à une valeur de P supérieure à 2, par exemple 3, 4, 5.

Je prends des valeurs vraisemblables et des chiffres ronds, car je fais une *classification* et non un calcul numérique. Nous aurons, avec $P = 3, 4, 5$,

$$K = P\mu = \frac{1}{20}, \frac{1}{15}, \frac{1}{12},$$

La condition (30) est assez bien remplie, et d'autant mieux que la valeur de P est plus petite.

La valeur : $\delta_m = \frac{1}{\omega}$, pendant un mouvement d'oscillation, correspondra à une valeur de P inférieure à 2 et assez voisine de 2, si, à ce moment, P varie peu.

Prenons, par exemple : $P = 2$, ou $\frac{3}{2}$.

Nous aurons :

$$K = P\mu = \frac{1}{30}, \text{ ou } \frac{1}{40}.$$

La condition (30) est bien remplie, car nous pouvons regarder $\frac{1}{30}$ et $\frac{1}{40}$ comme étant des nombres petits par rapport à 1.

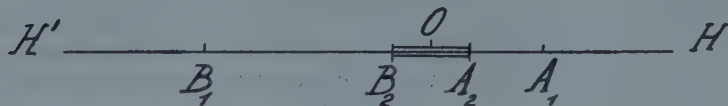


FIG 12.

D'après la relation (78), le minimum δ_m est assez petit et, au point correspondant à ce minimum de l'écart, l'on a :

$\omega P\delta = 3, 4, 5 \dots$ si le mouvement est une révolution ;

$\omega P\delta = 2, \frac{3}{2}, \dots$ si le mouvement est une oscillation.

Les chiffres que je donne n'ont rien de rigide. Je choisis des chiffres moyens, pour une trajectoire de plein fouet, en tenant compte de ce fait que la fonction $P(t)$ décroît rapidement au début, à peu près comme v^2 .

Je représente (Fig. 12) par le point A_1 le premier minimum de l'écart. Nous sommes au moment de la prestabilisation et l'on a : $OA_1 = \mu$.

Excluons l'intervalle $A_2 B_2$, dans lequel le minimum peut être nul ou presque nul :

$$OA_2 = OB_2 = \frac{1}{\omega}.$$

C'est un *intervalle réservé*, et particulièrement important.

Je représente par le point B_1 le dernier minimum de δ .

Examinons les minima successifs δ_m , en excluant l'intervalle réservé. Ces minima se trouvent dans l'intervalle $A_1 A_2$, ou bien dans l'intervalle $B_2 B_1$.

Considérons la suite des valeurs de K , pour les minima successifs de l'écart. Nous avons, pour le point A_1 :

$$K \sim \frac{1}{8}.$$

Nous avons, pour le point A_2 (si ce point correspond à un minimum de l'écart) :

$$\frac{1}{12} > K > \frac{1}{20},$$

d'après les chiffres adoptés antérieurement.

Le rapport des valeurs de l'écart, aux points A_1 et A_2 , est :

$$\mu\omega = \frac{200}{60} = 3,3,$$

d'après les chiffres adoptés antérieurement.

Le rapport des valeurs de P est compris entre $\frac{25}{3}$ et $\frac{25}{5}$,

d'après les chiffres adoptés, c'est-à-dire entre 8 et 5, à peu près. La variation de P étant plus forte que celle de δ , nous pouvons dire que la suite des valeurs de K (pour les δ_m successifs) sera décroissante, en général, entre A_1 et A_2 .

En général, la condition (13) sera vérifiée, de mieux en mieux.

Entre les points B_2 et B_1 , la fonction P est décroissante et la suite des δ_m est croissante.

Par suite, la suite des valeurs de K (pour les δ_m successifs) sera certainement décroissante, dans l'intervalle $B_2 B_1$. Donc la condition (13) sera remplie, d'une manière de plus en plus satisfaisante.

Nous ne pouvons faire aucun usage de la Théorie élémentaire si la condition (13) n'est pas remplie. Et la considération des écarts minima nous permet de substituer à la condition (13), la condition (30), que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$(30) \quad K = \beta(1).$$

En général, sur la partie utile d'une trajectoire de plein fouet, si l'on exclut la période d'irrégularité initiale, et une zone correspondant à un intervalle $A_2 B_2$ entourant l'origine O, la condition (30) est vérifiée.

Poursuivons cette étude générale.

J'ai supposé que la Dérivation est négligeable et il faut éviter de prendre des données contradictoires. Supposons que la plus petite valeur de la fonction Q soit 13, ou 14, par exemple. Ou bien c'est le minimum de Q, ou bien c'est la valeur de Q au terme de la partie utile de la trajectoire. La vitesse v reste assez grande. Je suppose qu'elle soit de l'ordre de 250 ms au terme de la partie utile de la trajectoire ; nous aurons, par exemple :

$$J = \frac{1}{26}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{28}, \quad \text{approximativement.}$$

Cela correspond à :

$$P = O\left(\frac{1}{2}\right).$$

La plus grande valeur de $\frac{1}{Q}$ étant, par exemple, $\frac{1}{14}$, ce qui correspond à peu près à 4° , le dernier minimum de l'écart pourra avoir la valeur $\frac{1}{19}$, par exemple, ce qui correspond à peu près à 3° .

Pour cette valeur de l'écart, on a :

$$\omega P \delta = O(5).$$

Considérons la suite des nombres $\omega P \delta_m$. Au début, nous avons des mouvements de révolution et la suite des nombres δ_m est une suite décroissante. En outre, la trajectoire étant de plein fouet, la fonction $P(t)$ est décroissante dans la partie utile de la trajectoire. Donc, au début, la suite des nombres $\omega P \delta_m$ est certainement une suite décroissante.

Nous excluons toujours une *zone réservée*, autour de la valeur zéro de l'écart, dans laquelle nous ne pouvons affirmer, a priori, que la Théorie élémentaire est valable, et dans laquelle $\omega P \delta$ peut être nul ou presque nul.

Ensuite nous avons des mouvements d'oscillation et, en même temps, les variations de la fonction $P(t)$ sont faibles, en général. D'autre part, les nombres δ_m forment alors une suite croissante. En général, les nombres $\omega P \delta_m$ formeront une suite croissante.

Nous voyons que, pour une trajectoire de plein fouet analogue à celle dont j'ai parlé au début de cette étude, la valeur numérique de $\omega P \delta_m$ pourra être de l'ordre de 83 au moment de la prestabilisation. Elle pourra rester supérieure à 1, si l'on exclut la zone correspondant à l'intervalle $A_2 B_2$. Et elle pourra être de l'ordre de 5 au terme de la partie utile de la trajectoire. Je redis que tous ces chiffres constituent seulement une indication.

J'ai admis que le dernier minimum de δ a pour valeur 3° environ. D'après les autres données, le dernier maximum de δ aurait pour valeur 5° à peu près. Il n'est pas absurde, dans ces conditions, de négliger la Dérivation.

Il faut voir maintenant quelle est la valeur du rapport Θ sur la partie utile de la trajectoire, la période d'instabilité initiale et la zone réservée étant *exclues*, bien entendu, puisque nous voulons employer les formules de la Théorie élémentaire.

Considérons d'abord un mouvement de révolution ou d'oscillation, dans lequel le minimum de l'écart est défini par la formule (78).

Soit δ une valeur quelconque de l'écart pendant ce mouvement de révolution ou d'oscillation. Nous avons :

$$\omega \delta \equiv \omega \delta_m \frac{\delta}{\delta_m} \equiv \frac{\delta}{\delta_m} > 1.$$

Employons la formule approchée (32), nous avons :

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{\omega} \frac{P'}{P} + \frac{J \cos \psi}{\omega \delta} , \\ (80) \quad \Theta &= \frac{1}{\omega} \frac{P'}{P} + J \cos \psi \frac{\delta_m}{\delta} , \end{aligned}$$

Nous savons que $\frac{J}{\omega}$ est un nombre très petit par rapport à 1. Le rapport $\frac{|P'|}{P}$ peut varier, par exemple, entre 0,2 et 0,04, et J est compris, par exemple, entre $\frac{1}{60}$ et $\frac{1}{25}$.

Ayant fait les *exclusions* qui s'imposent, nous pouvons dire que $|\Theta|$ est très petit par rapport à 1.

La conclusion est la même si nous considérons un mouvement *quelconque*, de révolution ou d'oscillation, parce que, si la relation (78) n'est pas vérifiée pour l'écart minimum de ce mouvement, on aura certainement :

$$(81) \quad \omega \delta_m > 1 ,$$

les *exclusions* nécessaires ayant été faites.

C'est un fait important. Les exclusions, qui s'imposent, étant faites, le premier moment est *prépondérant* par rapport au second. Il est très naturel d'admettre que le troisième moment est nul ou négligeable.

Considérons une force perturbatrice et désignons par \mathbf{N} son moment par rapport au centre de gravité.

Si, d'une manière *ordinaire*, le projectile était soumis à des forces perturbatrices telles que l'on ait :

$$\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{B}} = 0(10),$$

nous aurions, d'une manière normale, un mouvement gyroscopique troublé, sur une assez grande zone de la trajectoire.

Si nous pouvions avoir, d'une manière *ordinaire*, des perturbations telles que l'on ait :

$$\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{B}} = 0(5),$$

nous aurions normalement un mouvement gyroscopique assez différent du mouvement élémentaire, sur une certaine zone de la trajectoire, moins étendue que la précédente.

Au contraire, une perturbation telle que l'on ait :

$$(82) \quad \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{B}} = \beta(1),$$

ne serait pas efficace, lorsque nous regardons comme exclue la *zone réservée* ; je veux dire que son action ne serait pas très appréciable.

Naturellement tous les genres de perturbations sont réalisables, mais je m'occupe exclusivement des petites perturbations. Nous pouvons regarder comme faible une perturbation telle que la relation (82) soit réalisée. Elle pourra être efficace *seulement dans la zone réservée*, lorsque le premier moment est nul ou presque nul, si le deuxième moment *n'est pas prépondérant* par rapport au premier.

En excluant les projectiles franchement défectueux et les perturbations extraordinaires, nous avons ainsi une idée de ce que peut être une perturbation faible, correspondant à une *dispersion faible*. C'est une perturbation qui jouerait un rôle minime lorsque les équations de Mayevski sont valables et lorsque $|\Theta|$ est petit par rapport à 1.

Toutes les valeurs numériques sont choisies pour être vraisemblables, mais elles doivent être interprétées. Par exemple, le rapport des moments d'inertie $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$ n'est pas nécessairement égal à $\frac{1}{8}$. Le rapport $\frac{P_0}{w}$ n'est pas nécessairement égal à $\frac{1}{8}$. De même, j'ai défini la zone réservée d'après

la relation (78), mais la valeur de δ_m ainsi obtenue n'est pas une limite ferme, infranchissable.

Au point de vue des chiffres, je donne des indications générales, moyennes, qui doivent être revues dans chaque cas particulier. Mais la *conclusion essentielle est indépendante des valeurs numériques* que j'ai choisies pour donner un point d'appui à la discussion générale. Le fait est le suivant.

L'expression du premier moment s'annule en même temps que δ . Par suite, une petite perturbation n'est efficace qu'autant que δ est assez voisin de zéro. Et d'ailleurs, elle ne serait pas efficace si, M_x étant assez voisin de zéro, M_y était nettement prépondérant.

Je note, en terminant, que j'ai été constamment obligé de *mettre à part une certaine zone* entourant la valeur zéro de δ .

Dans cette zone, les équations de Mayevski perdent, en général, toute valeur. Et, en même temps, s'il existe un *moment perturbateur très petit*, c'est dans cette zone *seulement* qu'il sera *réellement efficace*, qu'il troublera sensiblement le mouvement gyroscopique.

12. ÉTUDE D'UNE COMPOSANTE DE LA ROTATION INSTANTANÉE.

J'ai fait constamment une approximation, en substituant ψ' à r , dans la première équation du moment cinétique. Il faut voir ce que vaut cette approximation, et, pour cela, il faut étudier la composante r .

Je ferai actuellement cette étude, dans deux circonstances qui sont particulièrement importantes :

- 1° écart nul, non minimum,
- 2° minimum presque nul de l'écart.

Cette étude est nécessaire parce que je fais usage de l'équation (44), obtenue par la dérivation de l'équation (5), et, par suite, j'ai admis tacitement que je puis substituer ψ'' à r' .

La trajectoire est de plein fouet. Je suppose que la Dérivation est négligeable, et, en particulier, que l'effet de Dérivation est nul si l'écart est nul, ou presque nul, ce qui est exprimé par les relations (62). Dans ces conditions, l'expression complète ⁽¹⁾ de r sera :

$$(83) \quad r = \psi' \cos \delta - \sin \delta \cdot J \sin \psi.$$

Nous avons :

$$(84) \quad \lim_{\delta=0} (r - \psi') = 0,$$

(1) J'ai donné les expressions de p, q, p, r , dans mon Mémoire : Sur le mouvement pendulaire... *Mémorial de l'Artillerie Française*, 1933, et dans mon Mémoire : Les équations du mouvement gyroscopique... *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1935.

de sorte que, si l'écart est nul ou presque nul, nous pouvons écrire :

$$(85) \quad r - \psi' = 0.$$

Cette relation est exacte si l'on a : $\delta = 0$, et elle est très approchée si l'on a : $\delta \sim 0$, et d'autant plus que δ est plus petit.

Donc, la Dérivation étant négligée, l'équation (5), qui résulte de la substitution de ψ' à r , représente une relation exacte si l'on a : $\delta = 0$, et une relation très approchée si l'on a : $\delta \sim 0$.

Voici maintenant l'essentiel. Nous prenons la dérivée, par rapport à t , de la formule (83), c'est-à-dire :

$$(86) \quad \left. \begin{aligned} r' &= \psi'' \cos \delta - \cos \delta \cdot \delta' J \sin \psi \\ &- \psi' \sin \delta \cdot \delta' - \sin \delta (J' \sin \psi + J \cos \psi \cdot \psi'). \end{aligned} \right\}$$

Premier cas. $\delta = \sin \psi = 0$, et δ' a une valeur finie, non nulle.

Nous savons que l'on a :

$$(87) \quad \lim_{\delta=0} \psi' \delta = 0.$$

Il en résulte :

$$(88) \quad r' = \psi''.$$

Dans ce cas, il n'y a *aucune correction* à faire à l'équation (44) ; il n'y a donc rien à reprendre dans les chapitres précédents.

Second cas. — Ceci concerne le chapitre suivant :

δ est minimum, $\delta' = 0$, $\delta'' > 0$, $\sin \psi = 1$, $\cos \psi = 0$.

Posons : $\delta = \epsilon_1$, ϵ_1 est un nombre fini, aussi petit que nous le voulons.

Nous verrons que l'on a : $\psi' \delta = \epsilon_2$, ϵ_2 est un nombre fini, si δ'' est fini. Nous avons :

$$(89) \quad \epsilon_1 \sim 0, \quad \epsilon_2 \text{ et } q \text{ finis.}$$

Il en résulte :

$$(90) \quad r' = \psi'' \cos \delta - \sin \delta \cdot J'.$$

Nous pouvons écrire la relation très approchée :

$$(91) \quad r' = \psi'' - \delta J' \equiv \psi'' - S,$$

l'approximation étant d'autant meilleure que δ est plus petit.

Nous verrons s'il est nécessaire de tenir compte du *terme résiduel* S .

13. ÉTUDE D'UN MINIMUM PRESQUE NUL DE L'ÉCART:

Considérons un *minimum* de l'écart, très voisin de zéro, dans un mouvement d'oscillation, représenté par le point A, dans la figure 13.

Je suppose, pour simplifier l'exposé, que le point A est situé sur OH'.

L'angle d'Euler ψ a pour valeur $\frac{\pi}{2}$, et l'on a : $\sin \psi = 1$, $\cos \psi = 0$.

Soient A_1 et A_2 les points correspondant au maximum et au minimum de ψ ; soient T_1 et T_2 les instants correspondants. Soit t_h l'instant correspondant au point A.

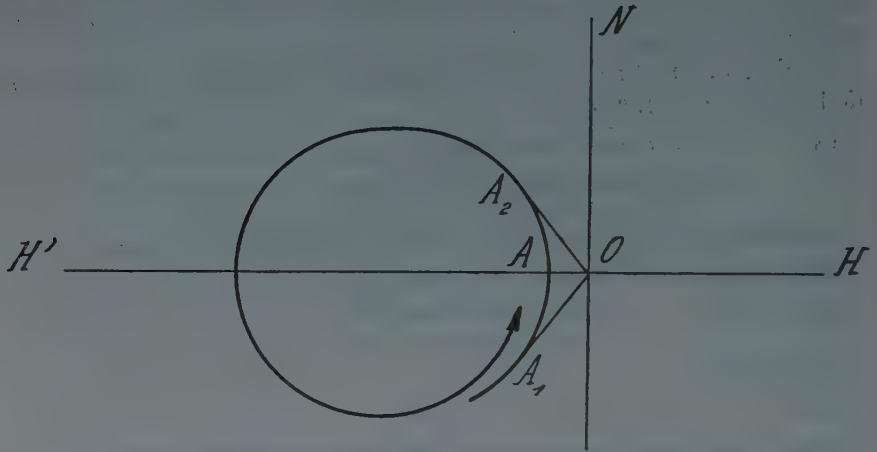


FIG. 13.

Nous avons :

$\psi' = 0$, à l'instant T_1 et à l'instant T_2 .

Au point A, ψ' est négatif, et grand en valeur absolue lorsque le segment OA, qui représente l'écart minimum, est très petit.

J'emploie les équations (GYS), ou, plus exactement, je suppose que l'effet de Dérivation est nul, à l'instant t_h ; je pose :

$$(62) \quad \eta' = \eta'' = 0, \text{ avec } \delta \sim 0, \text{ à l'instant } t_h.$$

Je suppose essentiellement que le tir est de plein fouet, avec un régime de grandes vitesses.

Si la courbe (α) était symétrique par rapport à l'axe OH' , et si, en deux points a_1 et a_2 , symétriques par rapport à OH' , les temps t_1 et t_2 étaient symétriques par rapport à t_h , en ces deux points nous aurions des valeurs égales pour δ , δ'' , ψ' , et des valeurs opposées pour δ' et δ''' . Dans ces conditions, le minimum de ψ' correspondrait au point A et nous aurions, à l'instant t_h : $\delta' = \delta''' = \psi'' = 0$.

En réalité, toutes ces symétries n'existent pas, mais elles peuvent être approximativement réalisées.

Pour simplifier et clarifier l'exposé, je prends les données numériques suivantes, à l'instant t_h :

$$P = 2, \quad J = \frac{1}{30},$$

$$Q = 60,$$

$$\omega = 200,$$

$$\frac{P'}{P} \text{ compris entre } -0,2 \text{ et } -0,04,$$

$$\frac{J'}{J} \text{ compris entre } 0,03 \text{ et } 0,003.$$

Je prends des données vraisemblables, pour une trajectoire de plein fouet, et des chiffres ronds.

L'instant t_h peut correspondre, sur la trajectoire, à un point plus ou moins voisin du sommet, plus ou moins voisin du point de chute. Je désigne par μ le rayon de prestabilisation, ou le module. Nous pouvons supposer, par exemple, que μ est compris entre $\frac{1}{40}$ et $\frac{1}{90}$.

La vitesse initiale est grande ; nous pouvons supposer, par exemple, que J est compris entre $\frac{1}{30}$ et $\frac{1}{40}$, à l'instant t_h . A cet instant, nous avons :

$$(92) \quad Q\mu \sim 1.$$

Prenons : $Q = 40$ et $J = \frac{1}{40}$, cela donne : $P = 1$.

Prenons : $Q = 90$ et $J = \frac{1}{30}$, cela donne : $P = 3$.

Prenons : $Q = 60$ et $J = \frac{1}{30}$, cela donne : $P = 2$.

En prenant : $P = 2$, je prends une valeur moyenne.

J'ai supposé que les valeurs de $\frac{P'}{P}$ et de $\frac{J'}{J}$ sont comprises dans un intervalle assez grand, pour ne pas imposer des conditions trop restrictives.

Tous ces chiffres, il faut le redire, constituent simplement des *indications générales*, suffisantes pour une *discussion générale*.

Au point A, correspondant à l'instant t_h , l'écart est minimum et l'on a :

$$(93) \quad \frac{d\psi}{dt} < 0.$$

Lorsque toute confusion est impossible, j'écris δ , au lieu de δ_m . En outre, j'écris x , au lieu de ψ' , pour simplifier la notation.

D'après la relation (93), nous pouvons écrire :

$$(94) \quad \omega - \psi' > \omega, \text{ au point A.}$$

Lorsque la valeur de δ_m est très voisine de zéro, nous pouvons substituer ψ' à r , dans la première équation du théorème du moment cinétique, d'après les formules (83), (84), (85). J'examinerai deux cas :

$$(95) \quad \omega^2 \delta_m = 1,$$

$$(96) \quad \omega^4 \delta_m = 1.$$

Cela me permettra d'obtenir des conclusions que l'on transformerait aisément en une conclusion générale.

Dans ces deux cas, la substitution de ψ' à r est parfaitement valable et nous pouvons remplacer la première équation du moment cinétique par l'équation (5).

Considérons le premier cas, défini par la relation (95). L'équation (5) a la forme ci-dessous :

$$(97) \quad x^2 \delta - \omega x \delta + \omega P \delta - \omega J - \delta'' = 0.$$

La solution négative est donnée par la formule :

$$(98) \quad 2x = \omega - \sqrt{\omega^2 - 4\omega P + 4 \frac{\omega J + \delta''}{\delta}}.$$

Nous avons certainement, $\delta(t)$ étant minimum :

$$(99) \quad \delta'' > 0.$$

C'est la seule restriction qui soit imposée à la valeur de δ'' . Pour montrer le rôle de cette dérivée δ'' , je ferai les calculs avec deux hypothèses différentes :

$$H_0 \quad \delta'' = 0,$$

$$H_1 \quad \delta'' = \omega J.$$

Cela suffira pour mettre en relief l'influence de la valeur de δ'' sur celle de x . Je suppose donc que la valeur de δ'' n'est pas grande.

Si elle était grande, il suffirait de faire l'hypothèse :

$$H_n \quad \delta'' = n\omega J.$$

Il n'y a ici aucune difficulté.

Je ferai cependant une observation. A priori, je dois examiner tous les cas possibles. Néanmoins il semble que les cas normaux doivent correspondre à une valeur δ'' assez faible. Nous verrons bien que les grandes valeurs de δ'' correspondent à des circonstances spéciales, que j'ai déjà signalées antérieurement.

J'ajoute une remarque. Nous avons, au point A :

$$p = 0.$$

Prenons l'expression générale de p' , donnée par la formule (57), nous avons, au point A :

$$(57^{\text{bis}}) \quad \frac{dp}{dt} = \delta'' + Jx.$$

Étude du premier cas.

Je prends les données suivantes, d'après ce que j'ai dit antérieurement :

$$\omega = 200,$$

$$\text{et, à l'instant } t_h \left\{ \begin{array}{l} P = 2, \quad J = \frac{4}{30}, \quad Q = 60, \\ \frac{P}{\omega} = \frac{1}{100}, \\ 4\omega J = \frac{80}{3}. \end{array} \right.$$

Pour faire un calcul rapide, qui est suffisant, je prends 27 comme valeur approchée de $\frac{80}{3}$, et j'admets que $4\omega P$ est négligeable par rapport à ω^2 .

Nous avons, en effet :

$$4 \frac{P}{\omega} = \beta(1).$$

J'admets d'abord l'hypothèse H_0 , nous aurons, au point A, les expressions approchées ci-dessous :

$$\begin{aligned} 2x &= \omega - \omega \sqrt{28}, & x &= -2,1\omega, \\ x\delta &= -\frac{2,1}{\omega}, \\ q &= -\frac{2,1}{\omega} + \frac{1}{30} > 0. \end{aligned}$$

J'admets ensuite l'hypothèse H_1 , nous aurons, à l'instant t_h , les expressions approchées :

$$\begin{aligned} 2x &= \omega - \omega \sqrt{55}, & x &= -3,2\omega, \\ x\delta &= -\frac{3,2}{\omega}, \\ q &= -\frac{3,2}{\omega} + \frac{1}{30} > 0. \end{aligned}$$

J'admets maintenant l'hypothèse H_2 , nous avons alors les expressions approchées :

$$2x = \omega - 9\omega, \quad x = -4\omega,$$

$$x\delta = -\frac{4}{\omega},$$

$$q = -\frac{4}{\omega} + \frac{1}{30} > 0.$$

Il faut calculer approximativement la valeur de p' , au point A, à l'instant t_h ; nous avons les valeurs suivantes :

$$\text{avec l'hypothèse } H_0 \quad -2,1 \omega J,$$

$$\text{avec l'hypothèse } H_1 \quad -2,2 \omega J,$$

$$\text{avec l'hypothèse } H_2 \quad -2 \omega J.$$

Pour faire une discussion rapide, je prends maintenant un cas tout différent; je suppose que la valeur numérique de δ'' soit un grand nombre. Par exemple, je ferai l'hypothèse suivante :

$$HY \quad \delta'' = \omega^2.$$

Nous pouvons substituer ω^2 à $\omega^2 + \omega J$, et $4\omega^4$ à $4\frac{\omega J + \delta''}{\delta}$, et nous aurons l'expression approchée :

$$x = -\omega^2.$$

Cela donne approximativement :

$$x\delta = -1,$$

$$q = -1 + J < 0.$$

$$\frac{dp}{dt} = \omega^2 - J\omega^2 > 0.$$

Nous avons toujours, au point A : $p = 0$.

Mais la valeur de q , en ce point, est un peu forte, au point de vue de la régularité du mouvement gyroscopique, fait que j'ai déjà signalé, et qui devrait être longuement commenté ⁽¹⁾. Il y a lieu, probablement, de faire la distinction entre la *stabilité* du mouvement gyroscopique et la *régularité* du mouvement gyroscopique.

Si l'on examine de près les équations de Mayevski, on voit qu'elles sont équivalentes aux équations (3).

Si l'on a : $\delta = 0$, on devrait avoir, en même temps : $q = 0$, d'après les équations de Mayevski.

⁽¹⁾ Voir ma Note sur les périodes d'instabilité virtuelle des projectiles. *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 26 octobre 1936.

Je devrai compléter cette Note, en ce qui concerne le moment d'impulsion initiale.

On aurait aussi, d'après les équations de Mayevski :

$$\frac{dp}{dt} = 0, \text{ quel que soit } \delta.$$

Nous constatons que les équations de Mayevski n'ont aucun sens, lorsque δ passe par un minimum extrêmement voisin de zéro.

Je m'occupe, exclusivement, des mouvements d'oscillation. Je devrai compléter cette étude, en examinant un minimum de l'écart dans un mouvement de révolution.

Étude du second cas.

Je prends un écart minimum beaucoup plus petit que le précédent, défini par la relation (96), $\delta = \frac{1}{\omega^4}$.

J'admets d'abord l'hypothèse H_0 , $\delta'' = 0$.

La formule (98) donne :

$$2x = \omega - \sqrt{\omega^2 - 4\omega P + 27\omega^4}.$$

Nous pouvons faire un calcul rapide, qui est suffisant, en employant la formule approchée :

$$2x = -\omega^2 \sqrt{27}.$$

Nous aurons donc, approximativement :

$$x = -2,6\omega^2, \quad q = -\frac{2,6}{\omega^2} + J, \quad p' = -2,6\omega^2 J;$$

$|p'|$ est un grand nombre.

J'admets maintenant l'hypothèse H_1 , $\delta'' = \omega J$.

Nous aurons, approximativement :

$$x = -3,7\omega^2, \quad q = -\frac{3,7}{\omega^2} + J, \quad p' = -3,7\omega^2 J;$$

p' est un grand nombre.

Nous voyons encore que les équations de Mayevski n'ont aucun sens. Il suffit de lire avec soin la formule (5).

Lorsque l'écart a un minimum extrêmement voisin de zéro, dans un mouvement d'oscillation, $\sin \psi$ ayant pour valeur 1, ou bien $\sin \psi$ étant voisin de 1, quelle que soit la valeur de δ'' , $|p'|$ est un assez grand nombre. Par suite, les approximations, qui constituent le vrai fondement des équations de Mayevski, perdent toute valeur.

Cette affirmation équivaut à celle-ci : les nombres ω et ω^2 , par exemple, ne sont pas négligeables par rapport à ω . C'est assez clair.

Ce phénomène gyroscopique est compliqué, difficile à saisir. Si nous pouvions le dominer totalement, bien entendu schématiquement, par les équations de Mayevski, c'est cela qui serait surprenant.

14. LES ÉTATS D'INSTABILITÉ VIRTUELLE CORRESPONDANT A UN MINIMUM PRESQUE NUL DE L'ÉCART.

J'ai reconnu l'existence de certains état d'instabilité virtuelle correspondant à la valeur zéro de δ .

Je vais montrer qu'il existe aussi des états d'instabilité virtuelle correspondant à un minimum de δ extrêmement voisin de zéro. Les circonstances ont une certaine ressemblance, mais elles ne sont pas identiques.

Lorsque l'écart est minimum, l'angle d'Euler doit être égal à 90° , ou bien il est voisin de 90° . Pour abrégier la discussion, je prends : $\psi = \frac{\pi}{2}$, à l'instant t_h .

Il s'agit bien entendu d'un mouvement d'oscillation.

Considérons la formule (71), qui donne l'expression du premier moment.

Si nous avons : $\delta = \frac{1}{\omega^2}$, (95), il en résulte :

$$\mathbf{M}_x = \mathbf{B} \frac{\mathbf{P}}{\omega}.$$

Si nous avons : $\delta = \frac{1}{\omega^4}$, (96), il en résulte :

$$\mathbf{M}_x = \mathbf{B} \frac{\mathbf{P}}{\omega} \frac{1}{\omega^2}.$$

D'après ce que nous pouvons savoir, au sujet des perturbations, nous pouvons concevoir l'existence d'un moment perturbateur \mathbf{N} , du même ordre de grandeur que les deux valeurs ci-dessus du premier moment.

Mais ces données n'ont rien de rigide. Si nous avons un moment perturbateur d'un ordre de grandeur moindre, il suffit de prendre, par exemple :

$$\delta_m = \frac{1}{\omega^6} \quad \text{ou bien} \quad \delta_m = \frac{1}{\omega^8}, \dots$$

Peu importe, pour ce que je fais actuellement. La méthode est indépendante de la valeur de δ_m ; il suffit que δ_m soit extrêmement voisin de zéro.

Pour simplifier l'exposé, je prends des expressions très simples pour δ_m .

Nous avons donc, à l'instant t_h , une très petite valeur pour le premier moment. Si, en même temps, à l'instant t_h , le deuxième moment a aussi une très petite valeur, nous aurons, à cet instant, un état d'instabilité virtuelle.

Je chercherai donc l'expression de \mathbf{M}_y . Nous avons, au point A :

$$(100) \quad \mathbf{M}_y = \mathbf{B} (\psi'' \delta + J').$$

Je dois calculer le produit $\psi''\delta$, et, pour cela, il faut prendre la dérivée de la première équation du théorème du moment cinétique. Je devrai maintenant, en principe, tenir compte du *terme résiduel*.

Je reprends la première équation du moment cinétique :

$$(101) \quad p' + q(\omega - r) = \omega P\delta.$$

A cette équation (101), j'ai substitué celle-ci :

$$(102) \quad p' + q(\omega - \psi') = \omega P\delta.$$

Il n'y a là aucune difficulté ; nous l'avons vu.

Mais il s'agit maintenant de la dérivée de l'équation (101). Il y a, par suite, un point sensible, à priori, c'est la substitution de $-q\psi''$ à $-qr'$, ou, plus exactement, de $q\psi''$ à qr' , parce que j'obtiens l'équation (5) en faisant passer dans le second membre tous les termes de l'équation (102). L'équation (44) provient de la dérivation de l'équation (5). Pour obtenir l'équation provenant de la dérivation de l'équation (101), je dois prendre l'équation (44), et ajouter le terme résiduel :

$$(103) \quad q(r' - \psi'').$$

D'après la relation (91), ce terme résiduel sera :

$$(104) \quad -q\delta J'.$$

Il est, d'ailleurs, inutile d'écrire la relation (44) dans toute sa généralité ; il suffit de l'écrire en faisant : $\sin \psi = 1$, $\cos \psi = 0$, $\delta' = 0$.

L'équation provenant de la dérivation de l'équation (101) sera donc, à l'instant t_h :

$$(105) \quad \psi''\delta(2\psi' - \omega) - \delta''' + \omega P'\delta - J'(\omega + \psi' + q\delta) = 0,$$

et nous avons : $2\psi' - \omega < 0$, non nul.

En général, le terme résiduel est négligeable, dans cette équation. En effet, d'après la formule (98), δ étant très voisin de zéro, $x\delta$ sera très voisin de zéro, sauf exception dans le cas où la valeur de δ'' serait excessivement grande. Dans les calculs du chapitre précédent, la plus grande valeur obtenue pour q correspond à : $\delta'' = \omega^2$, et ω^2 est un très grand nombre. Donc, en général, $q\delta$ sera très petit par rapport à $(\omega + \psi')$.

Voyons ce que donne l'équation (105). On donne δ et δ'' , et l'on peut calculer ψ' . Le produit $\psi''\delta$ est une fonction linéaire de δ''' et, par suite, \mathbf{M}_y est une fonction linéaire de δ''' . A priori, la dérivée δ''' peut avoir une valeur finie quelconque, positive ou négative.

Il existe donc, en général, une valeur finie de δ''' , telle que l'on ait :

$$\mathbf{M}_y = 0, \text{ à l'instant } t_h.$$

Si δ est très petit, \mathbf{M}_x sera très petit, et, pour cette valeur de δ'' , nous avons, à l'instant t_h , un *état d'instabilité virtuelle*.

Voici le résultat général. Il faut cependant signaler un cas particulier important.

Je suppose $|\psi'|$ très grand, à l'instant t_h , ce qui a lieu, par exemple, dans le second cas étudié dans le chapitre précédent, la valeur numérique de δ'' n'étant pas un grand nombre.

Et je suppose $|\delta'''|$ assez petit. Par exemple, je suppose que l'on ait :

$$(106) \quad \omega = \beta(|\psi'|), \quad \delta''' = \beta(J'|\psi'|), \quad \frac{|P'|}{J'}\delta = 0(1), \text{ ou bien } < 1.$$

Dans ces conditions, l'équation (105) peut être mise sous la forme suivante :

$$\psi''\delta + 2\psi' - J'\psi' \sim 0.$$

Il en résulte :

$$(107) \quad \psi''\delta \sim \frac{J'}{2},$$

et, par suite,

$$(108) \quad \mathbf{M}_y \sim \frac{3}{2} \mathbf{B} J'.$$

Si, à l'instant t_h , δ est très petit, \mathbf{M}_x sera aussi très petit. Si, à cet instant, J' a une valeur très petite, la valeur de \mathbf{M}_y sera très petite et nous aurons, à cet instant, un *état d'instabilité virtuelle*.

15. COMMENTAIRE.

Je rappelle ici les hypothèses qui ont été adoptées.

Je suppose que le tir est de plein fouet et que la Dérivation est négligeable. En particulier j'admets que l'effet de Dérivation est nul, lorsque l'écart est nul ou presque nul, en un point de la trajectoire distinct de l'origine.

Lorsque l'écart est nul, les équations de Mayevski sont dépourvues de sens, en général.

Lorsque l'écart a un minimum extrêmement petit, les équations de Mayevski n'ont aucun sens.

En même temps, lorsque l'écart est nul ou presque nul, il y a une *possibilité d'instabilité*, un état d'instabilité virtuelle, dans certaines conditions.

En outre, l'on peut avoir une certaine irrégularité provenant des valeurs numériques un peu fortes de p et de q . Je reprendrai cette question ultérieurement.

Je retiens seulement que le projectile peut se trouver dans un état

de *grande sensibilité*, lorsque δ est nul ou bien lorsque δ a un minimum presque nul.

Les phénomènes qui accompagnent la séparation du projectile et du canon sont violents et variés, et on leur attribue un grand rôle au point de vue de la *dispersion* du tir. C'est très judicieux.

Imaginons que le mouvement gyroscopique ait été rapidement régularisé, à l'origine ; c'est le cas le plus favorable.

Les états d'instabilité virtuelle, correspondant à un écart nul ou presque nul, sur la trajectoire, pourront encore jouer un rôle considérable au point de vue de la *dispersion*, en raison de la grande sensibilité du projectile.

Nous voyons combien est *incomplète* la théorie de Mayevski, qui a été reprise, avec un grand talent, par M. Burzio.

M. Kyrille Popoff a fait usage, récemment ⁽¹⁾, des équations de Mayevski-Burzio. Si j'ai bien suivi la pensée de M. Popoff, il tient pour *indiscutables*, au point de vue de la Mécanique, les équations de Mayevski. Partant de là, il leur fait subir des transformations analytiques, habiles et remarquables, auxquelles il donne le nom de « régularisation ».

Mais cette régularisation n'est pas toujours *efficace* au point de vue de la Mécanique. Si l'on régularise *des formes analytiques vides de substance physique*, c'est une opération abstraite, qui est *inopérante* au point de vue de la Mécanique.

Lorsque l'écart est nul ou presque nul, nous avons beaucoup de questions importantes à examiner, et la possibilité de la représentation du mouvement gyroscopique par les équations de Mayevski, autour du point zéro, n'offre pas un intérêt majeur, au point de vue de l'étude concrète du mouvement gyroscopique.

Le point zéro et les minima de δ très voisins de zéro peuvent être *des points singuliers*, au point de vue de la Mécanique, et ce fait essentiel reste dans l'ombre lorsque, comme le fait M. Popoff, on accorde une valeur exagérée à certains modes d'approximation.

A ce point de vue, les méthodes de Magnus de Sparre sont également imparfaites, car elles sont radicalement incapables de déceler les singularités possibles du phénomène gyroscopique, au point zéro, et autour du point zéro. On peut apercevoir, dans l'œuvre magistrale et considérable de Magnus de Sparre, des approximations *purement intuitives*, sans discussion, sans critique, qui ne procurent pas une parfaite sécurité.

Nous avons, dans la Balistique, beaucoup de notions confuses, la notion de stabilité, par exemple. Le mot « stabilité » est souvent employé sans grande précision.

(1) K. POPOFF, Sur le mouvement pendulaire des projectiles. *Revue mathématique de l'Union Interbalkanique*, Athènes, Imprimerie Nationale, 1936.

On dit souvent qu'un obus stable est couché sur sa trajectoire, et telle est, généralement, la définition de la stabilité balistique. Nous pourrions, par suite, être tentés de dire que, si l'écart est nul ou presque nul, c'est *une circonstance parfaite*, au point de vue de la stabilité. Cela paraît bien clair, mais c'est une *fausse évidence*. Nous ne pouvons confondre, à priori, la notion de stabilité avec l'idée confuse d'un écart faible.

Voilà un exemple frappant d'une notion intuitive qui ne saurait être pleinement adoptée sans discussion.

Il est bien dangereux, dans la Balistique, de suivre les sentiers battus.

Une difficulté fondamentale réside dans la nécessité de transformer des *notions intuitives* en des *notions positives*.

Cela ne va pas sans quelques tâtonnements.

Les observations d'équinoxes et de solstices dans le chapitre 1 du livre 3 du Commentaire sur l'Almageste par Théon d'Alexandrie

(Première partie)

RÉSUMÉ. — D'après Théon d'Alexandrie et Ptolémée, on décrit la construction, l'installation et le mode d'emploi des appareils ayant servi à observer les équinoxes et les solstices. On examine les discussions (et même les calculs) des erreurs que les anciens font à propos de ces observations. Dans une seconde partie, qui paraîtra plus tard, on étudie, d'après les mêmes sources, la critique que les anciens font de certaines mesures de la distance entre l'Épi et le point automnal, amenant des résultats paradoxaux.

1. Le chapitre sur la longueur de l'année. — Le troisième livre de l'Almageste fait la théorie des mouvements du soleil. La première question qui se pose à ce sujet, dit Ptolémée, est celle de la longueur de l'année. Ceci le mène à écrire un fort long chapitre, auquel Théon a joint un plus long commentaire dont il sera bon de mettre les grandes lignes sous les yeux du lecteur.

Hipparque s'est demandé si la longueur de l'année tropique est constante. Mais, dit Ptolémée, les variations qu'il trouve sont de l'ordre de grandeur de ses erreurs d'observation.

Hipparque examine à ce point de vue deux méthodes : d'abord l'observation directe de l'équinoxe ou du solstice, par des mesures de la hauteur du soleil ; les possibilités d'erreur de cette méthode sont discutées par lui-même, par Ptolémée et par Théon. Ensuite, la mesure, à l'aide d'une étoile occultée par la lune éclipisée, de la distance entre l'Épi de la Vierge et le point automnal. Cette mesure pose la question de la constance de l'année. De ces deux discussions ressort finalement qu'au degré d'approximation auquel ils pouvaient arriver, Hipparque et Ptolémée (Théon admettra tout ce qu'ils veulent) considèrent l'année comme constante.

Le terrain déblayé, on détermine une valeur de l'année tropique. Théon passe rapidement sur ce point. Le procédé consiste d'abord à comparer des solstices observés du temps de Méton, d'Euctémon et d'Aristarque, à ceux que Ptolémée a observés. Les discussions qui précèdent ont montré que c'est la moins bonne catégorie d'observations. Puis les équinoxes

d'Hipparque comparés aux équinoxes de Ptolémée donnent l'approximation déjà obtenue par Hipparque : l'année tropique dure $365 \frac{1}{4} - \frac{1}{300}$ jours.

Des témoignages d'Hipparque sont apportés en confirmation.

Et finalement, comme Ptolémée passe de la longueur de l'année à une table de la vitesse moyenne du soleil, Théon explique à ses élèves comment on fait une division sexagésimale.

Il était nécessaire, en commençant, d'esquisser les grandes lignes du chapitre, parce que le texte en est encore complètement inédit ⁽¹⁾. Pour autant que nous sachions, il ne se trouve que dans l'excellent Medicaeus 28.18, dont le modèle était, en cet endroit-ci, fort mutilé. Mais les restitutions se font avec une certitude suffisante, et l'on peut compter qu'une fois ce travail fait, on a un bon point de départ.

2. Intérêt de ce chapitre. — Ce long chapitre présente la particularité d'être un des rares morceaux de l'Almageste dont les données trouvent encore leur emploi dans l'astronomie moderne : les observations d'équinoxes, avec les observations d'éclipses et d'occultations sont utilisées

(1) Cela rend assez embarrassant le problème des citations du texte original. Nous renverrons aux folios de Med. 28.18. Lorsque le texte est lacuneux, nous le donnerons, afin de permettre au lecteur d'apprécier jusqu'à quel point il peut admettre nos conclusions basées sur un texte restauré. Les restaurations conjecturales, qui ont toujours approximativement le nombre de lettres correspondant à la longueur du blanc indiqué par Med. 28.18, sont entré crochets < >. Lorsque le texte est sûr et non lacuneux, nous demanderons au lecteur de vouloir bien nous faire crédit jusqu'à la sortie de presse du volume 3 de Théon.

Un petit détail intéressant sur le Med. 28.18, que les paléographes considèrent comme l'un des plus anciens manuscrits minuscules connus, si pas le plus ancien : Comme nous l'avons déjà dit ailleurs, ce manuscrit du IX^e siècle porte sur sa dernière page la mention (que M. l'abbé Beyssac a datée de la fin du XIII^e s.) : *expo theonis super primam partem*. La suite est coupée. Or d'après le card. F. EHRLÉ, *Historia bibliothecae romanorum pontificum tum Bonifatianae tum Avenionensis*, tome I, Rome 1890, p. 98, dans le catalogue de 1311 de la bibliothèque pontificale, se trouve, au numéro 624 : *item unum magnum librum, scriptum de littera graeca in cartis pecudinis, in quo continetur expositio Theonis super primam partem Almagesti, antiquum, et est in tabulis sine copertura et clausoriis*. Le même manuscrit figurait sous le numéro 429 dans le catalogue dressé sous Boniface VIII en 1295. Précisément la date attribuée à l'inscription du Med. 28.18, qui répond en tout point à la description ci-dessus, y compris l'état de délabrement des premières et dernières pages montrant qu'il a été longtemps *sine copertura*.

Mais au numéro 617 du catalogue de 1311 — 438 de celui de 1295, se trouve probablement la seconde partie : *in quo continetur commentum sive expositio Theonis super secundam partem Almagesti*.

Au XIV^e siècle, Théon se trouvait donc complet à Pérouse dans la bibliothèque pontificale, en un manuscrit excellent. Malheureusement, seule la 1^{re} partie de ce manuscrit est parvenue à la bibliothèque de Florence.

dans l'étude des fluctuations qui se superposent à l'accélération séculaire du soleil et de la lune ⁽¹⁾.

On utilise donc encore ce chapitre. Mais quelque chose fait qu'en outre on le lit avec intérêt : c'est qu'on y voit Ptolémée, et Théon à sa suite, discuter des erreurs d'observation avec un luxe de détails qu'on chercherait vainement ailleurs chez les anciens. Le fait est dû à ce que Ptolémée veut montrer que les variations supposées dans la longueur de l'année sont du même ordre de grandeur que les erreurs d'observation. Et nous le voyons raisonner fort correctement là-dessus.

Chez les anciens (Archimède en est l'exemple le plus célèbre) il faut souvent distinguer la méthode de recherche de la méthode d'exposition. Nous voyons ici fonctionner la méthode de recherche. Nous pouvons constater que les astronomes collectionnaient autant d'observations que possible, faites par eux-mêmes et par d'autres. Ils critiquaient ces observations et tâchaient d'en dégager la loi qui leur semblait la plus vraisemblable, celle qui « sauvait les apparences » le mieux possible.

Dans l'exposé, il leur arrive de mentionner une seule observation, celle dont les résultats coïncident précisément avec les formules qu'ils ont déduites de l'ensemble des faits. On est tenté, en ce cas, de croire qu'ils fondaient leurs formules sur cette unique observation. Mais s'ils l'avaient fait, leurs résultats seraient bien plus distants qu'ils ne le sont des résultats modernes : ce serait bien échu que l'observation unique soit tout justement ce qu'ils pouvaient faire de mieux avec les instruments qu'ils possédaient. Derrière les exposés dogmatiques, il y a vraisemblablement des discussions analogues à celles que nous allons analyser. Seulement, elles ne sont pas exprimées ⁽²⁾.

3. Liste des observations et remarques générales. — Commençons d'abord par faire l'inventaire des principales observations d'équinoxes et de solstices rapportées par l'Almageste. Nous obtenons la liste ci-dessous ⁽³⁾,

⁽¹⁾ Ce n'est pas notre rôle de résumer les travaux modernes sur la question. Nous ne pourrions manquer de nous montrer inférieur à cette tâche. Nous donnons en appendice une liste bibliographique, où les dernières études que nous avons lues sont reprises sous les numéros 5 à 11. Dans les notes qui suivent, les ouvrages cités seront désignés, pour abrégé, par leur numéro d'ordre dans cette liste.

⁽²⁾ Cfr. TANNERY, *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne*, Paris 1893, p. 117.

⁽³⁾ Liste des observations de solstices et d'équinoxes, mentionnées dans l'Almageste. Entre parenthèses nous donnons la date antique réduite dans le calendrier julien. Entre crochets carrés la date et l'heure que l'on obtient au moyen des tables de R. Schram, *Kalendariographische und Chronologische Tafeln*, Leipzig 1908, en temps vrai pour une longitude 30° Est de Greenwich (jours à partir de minuit). Hipparque observait à Rhodes et Ptolémée à Alexandrie. Les erreurs de tous deux atteignant plusieurs heures, il n'y a ici aucun inconvénient à prendre cette longitude approximative.

1° Alm. 195-196, cfr. 204. Groupe de 6 équinoxes d'automne et de 3 équinoxes de prin-

à laquelle nous avons ajouté, pour nous donner une idée de l'exactitude des observations, les heures et jours calculés d'après la table de Schram.

temps probablement observés par Hipparque et rapportés par lui dans son traité de la précession des équinoxes.

3^e période de Callippe, an 17, 30 Mésori au soir (= 27 septembre — 161)

[27 septembre à 5 h. 57. L'heure indiquée par Hipparque est 12 h. trop tard].

3^e période de Callippe, an 20, 1 Epagomène au soir (= 21 sept. — 158)

[26 sept. à 22 h. 28. Hipparque 7 h. trop tard].

3^e période de Callippe, an 21, 1 Epagomène à midi (= 27 sept. — 157)

[27 sept. à 5 h. 10. Hipparque 7 h. trop tard].

3^e période de Callippe, an 32, nuit du 3/4 Epagomène à minuit (= 26/27 sept. — 145)

[26 sept. à 21 h. 6. Hipparque 3 h. trop tard].

3^e période de Callippe, an 33, 4 Epagomènes matin (27 sept. — 145)

[27 sept. à 2 h. 58. Hipparque 3 h. trop tard].

3^e période de Callippe, an 34, 4 Epagomènes soir (26 sept. — 142)

[27 sept. à 20 h. 35. Hipparque 2 h. trop tôt : Le seul équinoxe d'automne de la série

placé trop tôt].

3^e période de Callippe, an 32, 27 Mechir matin; l'armille équatoriale d'Alexandrie donne 5 h. (soit 11 h. dans la façon civile moderne de compter) (= 24 mars — 145)

[24 mars à 18 h. 12. Hipparque 12 h. trop tôt. Observatoire (?) d'Alexandrie 7 h. trop tôt].

Les 5 années suivantes ont des équinoxes de printemps qui correspondent, c'est-à-dire qui sont toujours 6 h. plus tard que le précédent, d'après Hipparque.

3^e période, an 43, nuit du 29/30 Mechir après minuit (nuit du 23/24 mars — 134)

[24 mars à 10 h. 10. Hipparque 10 h. trop tôt].

Les années suivantes jusqu'à l'an 50 ont des équinoxes correspondants d'après Hipparque. Fotheringham compte cela comme des équinoxes observés, ce qui lui permet d'écrire 20 équations.

3^e période, an 50, 1 Pharmouthi au soir (23 mars — 127)

[24 mars à 2 h. 29. Hipparque 8 h. trop tôt].

2 Alm. 204. Observations d'Hipparque comparées par Ptolémée aux siennes :

Hipparque : équinoxe d'automne 3^e pér. de Callippe, an 32, voir ci-dessus.

Ptolémée : équinoxe d'automne de l'an 463 ère de Philippe, 9 Athyr, 1 h. après le lever du soleil (26 sept. + 139) [nuit du 24/25 sept. à 0 h. 4. Ptolémée 31 heures trop tard]

Hipparque : équinoxe de printemps 3^e pér. de Callippe, an 32. Voir ci-dessus.

Ptolémée : équinoxe de printemps de l'an 463 Philippe, 7 Pachon, 1 h. après midi (22 mars + 140) [21 mars à 18 h. 20. Ptolémée 18 h. trop tard].

3^e Alm. 205. Solstice d'été de Méton, comparé par Ptolémée à une de ses observations :

Méton : sous l'archontat (athénien) d'Apseudès, 21 Phamenoth au matin (27 juin — 431) [28 juin à 14 h. 57. Méton 33 heures trop tôt].

Ptolémée : 463 Philippe, nuit du 11/12 Mésori à 2 h. après minuit (nuit du 24/25 juin + 140) [23 juin à 16 h. 24. Ptolémée 33 heures trop tard].

4^e Alm. 233. Automne, printemps, été de + 139/140 observés par Ptolémée. Nous n'avons pas à en parler ici.

5^e Alm. 256, est aussi en dehors de notre sujet. Mais il s'agit là d'une observation d'équinoxe qui se trouve implicitement contenue dans toutes les longitudes du soleil calculées à l'aide de l'Almageste, c'est-à-dire par tous les astronomes jusqu'à la Renaissance. Elle mérite donc bien un moment d'attention :

L'an 17 d'Hadrien, 7 Athyr à 2 h. après midi = 25 septembre + 132 [24 septembre

On y remarque immédiatement que Ptolémée travaille moins bien que son prédécesseur. Les erreurs sont telles que pour calmer des scrupules éventuels du lecteur nous ajouterons que les heures obtenues par la table de Schram sont confirmées entre autres par le calcul direct des intervalles entre les équinoxes, en appliquant la formule de Schoch pour la longueur de l'année, et par les longitudes du soleil calculées par Fotheringham ⁽¹⁾.

Hipparque note à 6 heures près le moment de l'équinoxe. Ptolémée, tout en admettant qu'il n'a pas plus de certitude que son prédécesseur, est plus précis dans ses indications. Fotheringham ⁽²⁾ regrette qu'Hipparque n'ait pas procédé de même, entre autres motifs, parce que sa façon de s'exprimer produit, 6 heures étant presque la quantité dont l'année tropique dépasse les 365 jours, une concordance artificielle entre les observations qui se suivent, jusqu'à ce que l'accumulation des petites différences amène finalement un saut brusque et exagéré.

On a discuté si la série d'équinoxes rapportée par Hipparque ⁽³⁾ Alm. p. 195 se compose d'observations faites par Hipparque lui-même. Fotheringham l'a démontré suffisamment ⁽⁴⁾ et il est inutile de répéter ses arguments ici. Ils se trouvent confirmés par Théon, qui s'exprime ainsi : « Décivant ensuite les observations exactes d'équinoxes de printemps et » d'automne exécutées par Hipparque, Ptolémée montre... » ⁽⁵⁾. Il faut faire exception pour l'observation d'équinoxe faite au portique carré d'Alexandrie à l'aide de l'armille équatoriale, dont nous parlerons plus loin, p. 223. Hipparque a fait un grand nombre de ses observations à Rhodes ⁽⁶⁾.

+135 à 7 h. 8]. Ptolémée place donc l'équinoxe 31 heures trop tard environ. Fotheringham estime l'erreur dans la longitude du soleil à 1° 17' 25". Malgré cela, grâce à des erreurs qui se compensent, les longitudes du soleil calculées à l'aide des tables de l'Almageste, sont assez exactes à l'époque de Ptolémée. Elles ne le sont plus au fur et à mesure qu'on s'écarte de cette époque.

Les tables de l'Almageste font arriver le soleil sur 0° Bélier, en +325 (= l'an 1072 de Nabonassar), le 21 Payni à 23 heures à partir de midi, soit le 21 mars à 11 h. du matin, au lieu du 20 mars à 11 h. 55 temps vrai de Greenwich (environ 13 h. 55 Alexandrie). Ce sont elles qui sont responsables de la fixation de l'équinoxe au 21 mars. Le concile de Nicée ayant eu lieu en mai, ne s'est vraisemblablement pas basé, quoiqu'en pense Tannery, sur un équinoxe observé. Une erreur de 21 h. dans l'observation ne devrait d'ailleurs pas nous étonner. Il n'est peut-être pas tout à fait inutile de répéter que les experts du concile savaient que l'année tropique est plus petite que 365 1/4 jours, puisqu'ils lisaient l'Almageste, comme tout le monde.

(1) Cfr. 7, pp. 410 et 419.

(2) Cfr. 7, pp. 409 et 412.

(3) Cfr. ci-dessus, p. 215, note 3, 1°.

(4) Cfr. 7, p. 408.

(5) Cfr. Med. 28.18, fol. 129v.

(6) Cfr. Théon, n° 3, p. 614, 5. Toutefois Ptolémée, φάσεις ἀπλανῶν ἀστέρων (cfr. PTOLEMAEI *opera astronomica minora* ed. Heiberg, Leipzig 1907, p. 67, 10), donnant la liste des auteurs qu'il vient de compiler, avec le lieu de leur observatoire, nomme « Hipparque en Bithynie ».

Le procédé d'observation suivi par Hipparque n'est pas décrit par l'Almageste. Théon ⁽¹⁾ semble affirmer qu'Hipparque a utilisé les deux instruments méridiens décrits au 1^{er} livre de l'Almageste. Pour Ptolémée, c'est certain, il le dit lui-même, Alm. 203.22. En outre, du temps d'Hipparque comme du temps de Ptolémée, on a fait état des indications fournies par l'armille équatoriale. Il n'est pas question de l'astrolabe sphérique ni de l'instrument parallactique, dont la description ne viendra que bien plus loin dans l'Almageste. Quant à l'observation de longueurs d'ombres du gnomon elle est exclue formellement au 2^e livre.

Nous aurons donc une idée de la façon dont on s'y est pris, en rassemblant ce que Théon nous apprend des instruments méridiens du 1^{er} livre et de l'armille équatoriale, ainsi que les raisons qui lui font exclure le gnomon.

5. Les armilles méridiennes. — Cet instrument ⁽²⁾ fonctionne théoriquement comme nos lunettes méridiennes : il donne à la fois l'instant du passage du soleil au méridien et la hauteur du soleil à ce moment.

Il se compose d'une armille ou anneau en bronze de section carrée, dont les dimensions ne sont pas données par les auteurs ⁽³⁾.

Cet anneau est gradué sur sa face latérale : on le divise en 360 parties, subdivisées à leur tour aussi loin que possible (Théon, op. cit. p. 514.4). Théon admet, p. 528.20 une graduation de 5' en 5'. Avec une coudée de diamètre cela fait 4 mm pour 1°, et l'on peut y indiquer facilement, à raison de 3 au millimètre, des subdivisions de 5'. Cela peut se faire au moyen de points comme le demande Pappus pour l'astrolabe (cfr. n° 2, p. 8.4). Nous verrons plus loin Théon parler, pour l'armille équatoriale, d'un diamètre de 2 coudées : sur un instrument pareil cette division serait

⁽¹⁾ Cfr. Med. 28.18, fol. 128^{re}. Sans distinguer s'il s'agit d'Hipparque ou de Ptolémée, Théon explique : « on constate le passage (du soleil) à ces points (solstices et tropiques) » à l'aide de l'appareil composé d'armilles, décrit au 1^{er} livre, ou bien à l'aide de la » *plinthe* ; l'observation se fait suivant les instructions données en cet endroit. L'on » constate aussi le passage du soleil aux équinoxes au moyen de l'armille qui a sa circonférence dans le plan de l'équateur, lorsque la face interne du cercle est dans l'ombre ».

Med. 28.18, fol. 131^{re}. Hipparque ayant parlé d'un équinoxe arrivé à minuit, Théon va expliquer comment on s'y prend lorsque l'équinoxe ne tombe pas exactement à midi : « supposons par exemple que l'observation se fasse au moyen des armilles décrites au » 1^{er} livre ». γεγενήσθω δὲ ἡμῖν ἡ τήρησις ὑποδείγματος ἕνεκεν διὰ τῶν κρικῶν τῶν < ἐν τῷ α' βιβλίῳ > ἐκτεθειμένων.

⁽²⁾ Cfr. Alm. livre I, chap. 12. = Théon, n° 3, p. 513 sqq.

⁽³⁾ Demander à Théon quelles sont les dimensions absolues de ses instruments reviendrait à demander à un théoricien moderne quelles sont les dimensions d'un télescope. Le minimum d'après PROCLUS, *Hypotypose*, p. 42, 10 (ed. Manitius, Leipzig, Teubner 1902), est 1/2 coudée de diamètre. 1 coudée = 0 m, 444. Dans ce qui suit nous avons avant tout pour objet de réunir les renseignements fournis par Théon, moins accessibles que ceux de l'Almageste, de Proclus ou d'autres auteurs anciens.

très facile à marquer. Tandis que la division en minutes supposée par Proclus⁽¹⁾ pour son armille de $\frac{1}{2}$ coudée de diamètre, est invraisemblable : l'arc d'une minute y mesurerait 30 microns.

À l'intérieur de ce premier anneau tourne librement une seconde armille qui lui est concentrique. De petits arrêts fixés aux deux côtés de la première armille l'empêchent de s'échapper latéralement.

L'anneau intérieur est divisé en quatre parties égales. On détermine ainsi deux diamètres perpendiculaires. Aux deux extrémités d'un de ces diamètres se placent, en regard l'une de l'autre et perpendiculaires au plan de l'instrument, deux pinnules. Chez Proclus (*Hypotypose*, p. 46.22, éd. Manitius), ces pinnules sont percées d'un trou de visée. Chez Ptolémée et chez Théon, elles sont pleines et indiquent la direction du soleil par leur ombre : il faut que l'ombre de la pinnule supérieure vienne couvrir exactement la pinnule inférieure, ou si elle est assez large, laisse aux bords deux raies de lumière égales. Enfin, des aiguilles fixées au cercle intérieur permettent de repérer son mouvement sur la graduation du cercle extérieur. Ptolémée prévoit deux aiguilles. Rien n'indique pourtant qu'il suppose qu'on lise au cours de chaque observation les chiffres fournis par chacune des aiguilles, de manière à obtenir par des moyennes une lecture plus probable.

L'appareil constitué, il s'agit de l'installer. L'opération est recommencée à chaque observation⁽²⁾, parce qu'on se défie, nous allons le voir dans un instant (p. 230) des instruments installés une fois pour toutes et scellés dans un massif de maçonnerie.

On dispose d'une colonnette dont les bases sont bien parallèles, placée sur une terrasse horizontale bien exposée au soleil. Le problème est d'y fixer l'appareil dans le plan du méridien.

On règle d'abord la verticalité en laissant descendre un fil à plomb de la division du cercle extérieur que l'on désire mettre au zénith. On maintient l'appareil au moyen de supports dans une position verticale, le bout du fil à plomb touchant exactement la division du cercle diamétralement opposée à celle dont le fil pend. Manitius⁽³⁾ suppose une sorte de gouttière qui emprisonne environ 30° de l'armille extérieure. Mais alors l'appareil ne peut pas servir dans les régions où le soleil vient tout près du zénith, comme à Alexandrie. Nous supposons plutôt une rainure dans la colonnette, ou même rien du tout si on scelle au plomb.

(1) PROCLUS, *Hypotypose*, p. 44, 14-21.

(2) THÉON, *op. cit.*, 3, p. 515. 17. Il faut comprendre qu'on fait l'installation pour chaque série d'observations : pour avoir l'équateur au moyen d'une observation de solstice (et Théon en demande deux, été et hiver) il faut tout un temps.

(3) Manitius, dans sa traduction de l'*Almageste* : PTOLÉMÆUS, *Handbuch der Astronomie*, vol. I, Leipzig, Teubner 1912, p. 41 ; et dans son édition de PROCLUS, *Hypotypose*, p. 42.

On règle ensuite en azimuth : on trace la méridienne, Théon ne dit pas comment, et on place la colonnette dessus. Nous imaginons que ceci est fait d'avance, avant le réglage en verticalité. On fait tourner l'armille autour de son diamètre vertical, en faisant bien attention à ce que le fil à plomb reste correctement placé, jusqu'à ce qu'en visant le long des parois (ou par les trous des pinnules si l'on a le dispositif de Proclus) on constate que le plan de l'appareil passe bien par la méridienne.

Théon signale une autre façon, plus simple, de procéder : on dépose la colonnette sur la méridienne. Puis des deux côtés de sa base on place sur la méridienne deux règles bien verticales. Cela fait, on n'a qu'à appuyer l'armille sur les règles et sceller au plomb : elle sera du coup verticale et dans le plan du méridien.

L'observation des solstices est décrite en détail au 1^{er} livre (Théon, op. cit. p. 518) : aux environs du solstice d'été, vers la 6^e heure, on attend le moment où les armilles sont sans ⁽¹⁾ ombre : c'est le midi vrai. A ce moment, on fait tourner le cercle intérieur jusqu'à ce que la pinnule du dessus porte ombre sur celle du dessous. On lit sur la graduation la distance zénithale du soleil ainsi obtenue.

On recommence tous les jours à midi jusqu'à ce que la hauteur cesse d'augmenter. On a ainsi la hauteur du soleil au solstice d'été. Par interpolation, on trouve aussi le moment du solstice lui-même ; nous verrons plus loin avec quelle approximation : La hauteur est assez bonne, parce qu'elle varie fort peu au moment des solstices ; mais précisément pour ce motif le temps est fort mal déterminé.

On recommence l'opération au solstice d'hiver. On obtient ainsi le moment du solstice et la hauteur du soleil lorsqu'il atteint le tropique. Le point de la graduation, exactement à mi-chemin entre la distance zénithale d'hiver et celle d'été, est la distance zénithale de l'équateur.

Théon note explicitement cette façon de procéder (p. 519.27) et elle est intéressante, parce que Fotheringham ⁽²⁾, en réduisant les observations d'équinoxes par la méthode des moindres carrés, a trouvé qu'Hipparque et Ptolémée plaçaient tous deux leur équateur trop bas. Cela est d'ailleurs évident sans calcul pour les équinoxes d'Hipparque (ci-dessus, p. 215, note 3, 1^o) : tous les équinoxes de printemps, sans exception, sont trop tôt, et tous les équinoxes d'automne (sauf — 142) sont trop tard.

Chose étrange, la tendance était d'attribuer à Rhodes une latitude plutôt trop petite que trop grande : La Géographie de Ptolémée (5, 2, 34)

(1) Sans ombre propre, c'est-à-dire que les faces planes sont éclairées par une lumière rasante, ou bien sans ombre portée, c'est-à-dire que l'ombre portée est une mince ligne sous l'armille et fort courte. Le texte de Théon admet les deux interprétations.

(2) Cfr. n^o 7, p. 412-415.

compte que l'île de Rhodes ne dépasse pas 36° lat., alors que ⁽¹⁾ la ville de Rhodes se trouve par $36^{\circ}26'$ lat. (et $28^{\circ}14'$ long. Est Greenwich). La latitude de l'observatoire d'Hipparque était estimée à 36° (Théon, *op. cit.*, p. 614.7). S'il était sur le sommet le plus élevé de l'île, soit au temple de Zeus d'Atabyrion, il se trouvait par $36^{\circ}12'$ lat., $27^{\circ}52'$ long. De même, en adoptant $30^{\circ}58'$ pour la latitude d'Alexandrie (Alm. 407.17) Ptolémée plaçait la ville trop au Sud.

Fotheringham a en outre constaté qu'Hipparque a amélioré son équateur au cours de sa carrière.

Ce n'est donc pas a priori, d'après l'estimation faite une fois pour toutes de la latitude de leur observatoire, qu'Hipparque et Ptolémée ont déterminé la position occupée par l'équateur sur la graduation de l'armille. Il est donc très vraisemblable qu'Hipparque a suivi la méthode qui vient d'être exposée et il est presque sûr que Ptolémée l'a fait.

Pour déterminer l'équinoxe, on procédait de façon analogue ⁽²⁾ : pendant plusieurs jours, on observe la hauteur méridienne du soleil. Lorsqu'on trouve finalement le soleil de l'autre côté de l'équateur, c'est que l'équinoxe est passé. Des deux observations méridiennes les plus voisines de l'équinoxe, on retient celle où le soleil était le plus proche de l'équinoxe. Cherchant cette déclinaison dans la table des déclinaisons ⁽³⁾, on trouve à quelle distance, mesurée sur l'écliptique, le soleil se trouve du point équinoxial. On divise cette distance par le mouvement moyen du soleil en une heure et l'on trouve combien d'heures avant ou après le midi du jour retenu se place l'équinoxe.

5. La « plinthe ». — L'observation méridienne pouvait être faite également au moyen d'un instrument qu'on appellerait un cadran mural ⁽⁴⁾

⁽¹⁾ Il convient de remarquer que le texte de la Géographie n'est pas encore bien établi : il est fort possible que les latitudes des quatre villes rhodiennes mentionnées par Ptolémée soient mal reproduites dans les éditions actuelles. L'omission de la ville de Rhodes elle-même fait soupçonner une mutilation.

L'île de Rhodes a pour extrémité Nord la pointe de Kum Burnu, $36^{\circ}27'$ lat. ; $28^{\circ}13'1/2$ long. Est Greenwich ; pour extrémité Sud Prassonisi, $35^{\circ}52'$ lat. ; $27^{\circ}45'$ long.

⁽²⁾ Cfr. *Med.* 28.18, fol. 131^a.

⁽³⁾ Cfr. *Alm.* 80. Cette méthode est moins précise qu'elle n'en a l'air, parce que la table des déclinaisons de l'Almageste donne les déclinaisons correspondant à chaque degré de l'écliptique : il faut donc qu'on fasse des interpolations proportionnelles. D'ailleurs l'imprécision des observations elles-mêmes rendrait tout à fait illusoire une plus grande rigueur dans les calculs. On a fait des hypothèses sur la façon dont les anciens s'y prenaient pour trouver l'heure de l'équinoxe lorsque celui-ci ne tombait pas à midi au lieu de l'observation. Le texte de Théon que nous résumons ici le plus exactement possible vient donc bien à point.

⁽⁴⁾ Cfr. *Alm.* 66, 16. — THÉON, *op. cit.*, 3, p. 522, 5. — HALMA (cfr. 2, vol. 1, p. 224) ne donne aucun nom à l'instrument, et se sert de circonlocutions. DELAMBRE, *Histoire de*

si la pierre sur laquelle il est tracé n'était pas déplaçable, sans doute à cause de la peur qu'inspiraient aux anciens les instruments scellés dans des massifs de maçonnerie : comme pour les armilles, on désirait pouvoir recommencer de temps à autre l'installation.

Un bloc de bois ou de pierre est taillé en parallépipède rectangle. Il doit être assez épais pour être bien stable lorsqu'on le pose de champ. Une de ses faces verticales doit être bien dressée (travaillée à la règle et tendue comme une peau de tambour, dit Théon). A peu près ⁽¹⁾ dans l'angle supérieur qui devra être tourné vers le sud, on repère un point à partir duquel on abaisse une ligne verticale, et l'on mène une horizontale ; puis avec ce point comme centre, on trace un quart de cercle de rayon aussi grand que possible. On le divise en 90° et chacun des degrés en autant de subdivisions que l'on peut. Au centre de l'arc du cercle, on place un gnomon cylindrique perpendiculaire à la surface dressée : l'ombre de ce gnomon va indiquer toute seule la hauteur méridienne du soleil. Au bas de la ligne verticale un autre gnomon sert, lors de l'installation, au contrôle de la verticalité.

Pour l'installer, il faut d'abord avoir une dalle dans un endroit exposé au soleil, et placée bien horizontalement. L'horizontalité est contrôlée au moyen du « diabètès ou alpharion, instrument qui ressemble au chorobate de Carpus » (Théon, 3, p. 523.25). Cette explication paraissait d'autant plus énigmatique qu'une légère erreur des manuscrits aggravée par de trop ingénieuses conjectures des philologues, avait transformé le chorobate de Carpus en un fruit. Certains savaient même qu'il ressemble à une poire. En fait l'alpharion est un instrument en forme d'alpha, A. Au sommet de l'A pend un fil à plomb, qui passe en regard d'un repère marqué sur la traverse, lorsque les deux jambes de l'A reposent sur une ligne horizontale. C'est donc une équerre de maçons.

L'horizontalité se constate également en versant de l'eau sur la dalle : le liquide ne doit avoir aucune tendance à s'écouler. La position de la dalle est rectifiée par des cales introduites en dessous jusqu'à ce qu'on arrive à un résultat satisfaisant.

Sur cette dalle on trace la méridienne ; puis on place la plinthe parallèlement à la méridienne, en visant ; ou même le long de la méridienne elle-même. Une fois le réglage en azimuth obtenu, on règle en verticalité, à l'aide d'un fil à plomb pendant de l'extrémité du gnomon du dessus, qui doit venir toucher le gnomon du dessous.

l'astronomie ancienne, Paris 1817, tome 2, p. 74 l'appelle brique, plinthe, ou planche. Prenons plinthe, puisque Théon dit πλινθίς (le mot signifie brique).

⁽¹⁾ THÉON, *op. cit.*, 3, p. 530, prévient que dans les instruments destinés aux régions tropicales, il ne faut pas mettre ce point dans l'angle mais plus vers le milieu de la pierre, l'arc de cercle devant avoir plus de 90°. La raison en est claire et il est superflu de reproduire les explications de Théon.

L'observation se fait exactement comme avec les armilles méridiennes, sauf que la hauteur du soleil est marquée par l'ombre sur le cercle gradué. Ici, comme sur les armilles, la position de l'équateur n'est pas déterminée à priori, d'après la valeur admise pour la latitude de l'observatoire : on la cherche en observant le solstice d'été et celui d'hiver et en prenant le milieu (Théon op. cit. n° 3. p. 527.3). Pour mieux voir l'ombre, on tient une petite tablette près de la graduation. Le gnomon ayant une certaine largeur, il faut marquer sur la graduation les deux bords de la raie d'ombre et prendre le milieu pour avoir la distance zénithale du soleil (Théon, p. 526.1).

6. L'armille équatoriale. — Dans le traité de la précession des équinoxes, Hipparque mentionne l'armille du Portique carré d'Alexandrie « qui semble indiquer le jour de l'équinoxe : c'est celui où sa surface » concave commence à être éclairée par l'autre côté » (Cfr. Alm. 195.5).

Cette phrase, rapprochée de renseignements fournis par Ptolémée et Théon ⁽¹⁾ indique clairement en quoi consiste l'instrument : un anneau placé dans le plan de l'équateur est éclairé sur une partie de sa surface intérieure. Tant que le soleil est au nord de l'équateur, la lumière qui tombe ainsi sur la surface intérieure vient d'au-dessus de l'armille. Après l'équinoxe d'automne elle vient d'en dessous. Le jour où la direction se renverse est donc le jour de l'équinoxe ⁽²⁾. En théorie, même, ce procédé indique l'instant de l'équinoxe : c'est le moment où la partie interne de l'anneau est dans l'ombre, sauf, ajoute Théon, que si le cercle a au moins

(1) Ptolémée, Alm. 197, 17. — Théon, cfr. Med. 28.18, fol. 129v.

(2) Fotheringham a tort de supposer qu'il y a dans l'armille une fente donnant une raie de lumière. Cette hypothèse est formellement exclue par l'explication de Théon. Théon parle certainement du même cercle qu'Hipparque, puisque son explication vient à propos d'Alm. 196, 7 que nous citons plus loin et qui est d'Hipparque. Théon nous donne ainsi une idée des dimensions de ces armilles. Evidemment, toutes n'ont pas deux coudées de diamètre : Ptolémée parle du plus grand des deux cercles de la Palestre, ce qui implique des dimensions variables d'un appareil à l'autre. Si l'on prend un cercle épais de 3 cm, dont le diamètre intérieur serait de 88 cm, on trouvera facilement qu'au moment de l'équinoxe, le centre du soleil se trouvant exactement dans le plan de l'appareil, l'ombre a 22 mm de large et il y a de chaque côté une bande éclairée de 4 mm. L'égalité de ces deux bandes peut s'observer facilement, si l'armille est, comme nous le pensons, un cadran solaire : pour lui faire indiquer les heures saisonnières, seules pratiques pour les anciens, il fallait y tracer plusieurs lignes parallèles (au moins 4) portant les graduations pour chaque mois. Ces lignes parallèles permettaient d'apprécier si les deux raies étaient égales.

Tant que nous sommes à calculer, dans un pareil cercle lorsque la déclinaison du soleil au moment de l'équinoxe varie de 1', l'ombre bouge de 0 cm, 0255, ce qui ne peut pas se voir ; pour 2', on a 0 cm, 0510 ; pour 3', on a 0 cm, 0765 ; pour 4', on a 0 cm, 1020. Nous estimons donc que c'est seulement à partir d'une déclinaison de 4' qu'on voit que le soleil n'est pas sur l'équateur (Nous négligeons ici la réfraction).

deux coudées de diamètre il reste au moment même de l'équinoxe une raie lumineuse de chaque côté.

Hipparque ne croit pas beaucoup à l'exactitude de ce renseignement : il rapporte (Alm. 196.7) l'équinoxe du 24 Mars — 145 au matin, d'après lui, et il ajoute : « d'autre part, le cercle d'Alexandrie a été éclairé également » des deux côtés vers la 5^e heure ». L'observation retenue par lui et par Ptolémée, est celle du matin. On a remarqué il y a un instant, qu'Hipparque disait : « le cercle du Portique carré *semble* indiquer l'équinoxe ».

Peut-on dire que le cercle du Portique carré d'Alexandrie, dont parle Hipparque Alm. 195.5 et 196.8 est l'un des deux cercles de la Palestre d'Alexandrie, que nomme Ptolémée Alm. 197.17 ? Il nous semble que non ⁽¹⁾. Mais l'enchaînement des idées de ce chapitre montre clairement que les deux auteurs parlent d'appareils de même construction.

Ptolémée ne les aime pas, parce qu'ils sont scellés sur des bâtis de maçonnerie placés au-dessous d'eux. On pourrait même comprendre qu'ils sont scellés à même le dallage, car le mot *ἑδαφος* peut tout aussi bien désigner le sol ou le pavement, que les fondations. « On penserait, dit » Ptolémée, qu'ils sont dans la direction de l'équateur, mais avec le temps, » ils se déplacent insensiblement. Si l'on y fait des observations, on » remarque qu'ils ne sont plus en position ; surtout le plus grand et le » plus ancien des deux ; au point que parfois, leur face interne a présenté » le renversement d'éclairage deux fois au même équinoxe ».

Nous avons rendu *τηροῦσι* (Alm. 197.20) par son équivalent technique « faire des observations » ; mais il serait peut-être plus exact de lui donner son sens ordinaire de « faire bien attention » : Si Ptolémée trouve que ces cercles ne valent rien, il ne va pas perdre son temps à y faire des observations.

On peut même douter si ces cercles avaient été construits en vue d'observations scientifiques de l'équinoxe. Ce pouvaient être des cadrans solaires : il suffisait d'un gnomon passant par leur centre et perpendiculaire à leur plan, pour que l'heure se marque sur la face interne. Et en ce cas tout le monde allant y regarder l'heure savait fort bien qu'en été la lumière arrivait par au-dessus et en hiver par dessous. Au jour de l'équinoxe le cadran indiquait l'heure en même temps qu'il semblait indiquer

(1) Le plan d'Alexandrie antique est assez mal connu, la ville moderne se trouvant sur le site de l'ancienne. C'est dans l'Almageste, et à deux pages de distance, que tous ces appareils sont mentionnés. Puisque Ptolémée emploie deux noms différents, il est à supposer qu'il veut désigner deux monuments distincts. Evidemment, il a pu oublier que tous ses lecteurs n'étaient pas d'Alexandrie, et employer sans prévenir deux appellations synonymes. Mais jusqu'à preuve du contraire, nous devons le prendre au mot. Hipparque parle d'un seul appareil : il semble ne pas en connaître un autre dans le Portique carré. Ptolémée en connaît deux dans la Palestre, puisqu'il emploie le comparatif et pas le superlatif pour désigner le plus grand et le plus ancien.

l'équinoxe : on était tenté de prendre cette indication pour exacte. En outre, si c'était un cadran solaire, comme l'heure civile était saisonnière, il fallait une graduation permettant de lire l'heure saisonnière. En se contentant de l'heure saisonnière du mois, comme on le faisait dans la généralité des cadrans, il suffisait de quatre graduations ; le compte est facile à faire. En ce cas, il y avait sur la face interne quatre lignes parallèles qui permettaient de juger plus facilement que les deux raies de lumière étaient égales. En admettant que ce sont des cadrans, on explique en même temps pourquoi il y en a dans plusieurs monuments d'Alexandrie, y compris la Palestre, endroit destiné semble-t-il à toute autre chose qu'à l'astronomie.

Mais on s'explique facilement, puisque cet appareil existait en plusieurs exemplaires à Alexandrie, et qu'il semblait, comme dit Hipparque, indiquer l'équinoxe, qu'Hipparque et Ptolémée aient dû combattre le préjugé qui existait en leur faveur.

7. Le gnomon. — L'équinoxe et les solstices pouvaient encore être observés en mesurant la longueur de l'ombre portée d'un gnomon. Il suffit de lire le commencement du 2^e livre de l'Almageste, et les explications correspondantes de Théon, pour voir que cette méthode n'a pas dû être en faveur. Voici quelques passages, résumés, de Théon qui suffiront à le montrer. Nous ajoutons les pages du commentaire de Théon où l'on pourra trouver le texte complet. En commençant à parler de ces mesures d'ombres, p. 614, Théon signale que la latitude se détermine à l'aide des instruments du 1^{er} livre, l'armille et la plinthe ; nous avons vu comment. P. 620 : De la longueur du plus long jour de l'année, mesurée à la clepsydre, on peut déduire la hauteur du pôle, et réciproquement, si l'on a la hauteur du pôle par les instruments du 1^{er} livre, on peut calculer la longueur du plus long jour (réfraction non comptée, comme toujours dans l'Almageste). P. 636 : étant donné l'obliquité de l'écliptique et la hauteur du pôle avec les appareils du 1^{er} livre, on peut calculer la longueur des ombres à midi. P. 643 : réciproquement, si l'on a deux observations méridiennes de longueur d'ombre, on peut trouver la hauteur du pôle et l'obliquité de l'écliptique. Mais (p. 647) la façon pratique de les trouver reste d'utiliser les appareils du 1^{er} livre. En effet, aux équinoxes la déclinaison du soleil change rapidement, et en conséquence la longueur d'ombre à midi est différente de ce qu'elle serait si l'équinoxe coïncidait avec le passage du soleil au méridien. Et aux solstices c'est la longueur d'ombre elle-même qui est difficile à trouver : en été elle est trop courte (Alexandrie se trouve par 30° lat.) et en hiver l'extrémité est floue. C'est dommage car aux solstices la longueur varie peu et la hauteur du soleil à midi est sensiblement la même que si le solstice coïncidait avec la

culmination. En conséquence, p. 648, Théon déconseille formellement le gnomon. Aussi, n'en est-il pas question une seule fois dans le 1^{er} chapitre du 3^e livre.

8. Discussion de ces observations par les auteurs modernes. — Comme nous le disions en commençant, ce passage de l'Almageste n'a jamais cessé d'intéresser les astronomes. DELAMBRE, *Histoire de l'astronomie ancienne*, t. 2, p. 112, rappelle Riccioli, Flamstead, Cassini. Lui-même, s'appuyant sur les calculs de l'astronome Marcot, avait conclu que Ptolémée n'avait rien observé du tout, et avait inventé des heures et des dates d'équinoxes qui donnaient raison à Hipparque. Nous reviendrons plus loin sur cette question, importante parce que si l'on admet que c'est exact, il faut également être prêt à admettre que l'Almageste est une immense plaisanterie : il n'en resterait plus que les calculs reposant sur le néant puisqu'un fait précis affirmé par Ptolémée devrait être considéré comme non attesté.

TANNERY, *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne*, p. 153, n'est pas loin non plus d'admettre que les observations de Ptolémée sont, ou bien altérées pour les faire concorder avec les résultats d'Hipparque, ou bien conduites de manière à vérifier que cette estimation d'Hipparque était d'accord avec les faits. Il cherche le temps qui s'est écoulé entre les équinoxes et solstices des anciens auteurs et les observations que Ptolémée met en regard de ceux-ci. L'erreur que ce calcul lui fait découvrir est divisée par lui en parts égales entre l'auteur ancien et Ptolémée. En se référant à la note 3 de la page 215, on pourra constater qu'en fait l'erreur se divise autrement, et d'une façon qui est moins encore à l'avantage de Ptolémée.

Nous n'entreprendrons pas de discuter les travaux de ces dernières années. M. Fotheringham a eu l'idée de traiter les équinoxes d'Hipparque par le calcul des erreurs, comme si c'étaient des observations modernes. Nous avons noté qu'il écrivait 20 équations, parce qu'il considère comme observés tous les équinoxes dont Hipparque dit d'une façon générale : les équinoxes suivants, jusqu'à telle date, sont tombés à l'heure qu'il faudrait si l'année avait exactement $365 \frac{1}{4}$ jours. Il est logique d'admettre qu'une telle affirmation implique des observations faites à 6 heures près comme les autres. Mais elles ne sont donc pas mentionnées explicitement. Fotheringham prévient d'ailleurs son lecteur, puisqu'il commence par donner la traduction exacte de tous les passages de l'Almageste dont il fait usage.

Nous avons déjà dit qu'un résultat curieux de ces calculs est de montrer qu'Hipparque mettait son équateur 7' trop au sud, et qu'il a amélioré ses installations d'appareils : les dernières observations (—127) supposent un meilleur équateur, et les observations d'étoiles rapportées par Alm. vol. 2,

p. 12-23, dont la date moyenne est —127,28 supposent un équateur qui n'est plus qu'à 4' trop au sud.

Dans le tableau préliminaire Fotheringham donne la distance à laquelle le soleil se trouvait de 180° ou 360° , au moment où Hipparque dit que l'équinoxe est tombé. En automne, naturellement, toutes les différences sont négatives (sauf une) et au printemps toutes sont positives : cela signifie que dans les deux cas on compte le soleil sur l'équateur alors qu'il est déjà au sud. L'erreur en déclinaison a donc toujours le même signe. On obtiendra donc la moyenne des erreurs en déclinaison en prenant la moyenne des valeurs absolues des erreurs en longitude, puisqu'en déclinaison ces erreurs jouent toutes dans le même sens. Cette moyenne est $25'45''$, correspondant à $0^\circ12'5''$ environ. Puisqu'il y a 7' d'erreur due à l'équateur, il reste environ 5' d'erreur due à l'observation. C'est précisément cette approximation de 5' qui constitue ce qu'on peut atteindre de mieux avec les appareils de l'Almageste.

Nous nous contentons de noter le fait, et pour le reste de renvoyer aux travaux modernes, crainte de trop les déformer en les résumant.

9. Discussion des erreurs par les anciens. — Il sera plus fructueux pour nous d'examiner comment les anciens critiquent leurs propres observations.

Sur ce point, Théon ajoute peu à Ptolémée. Il nous fait connaître la méthode suivie pour calculer l'instant de l'équinoxe lorsqu'il ne coïncide pas avec le midi du lieu d'observation. Nous en avons parlé plus haut, p. 221. Pour les erreurs proprement dites, il se contente de développer les calculs de Ptolémée, et même il passe sans commentaire de longs morceaux de l'Almageste.

Ptolémée Alm. 194 constate que les variations que l'on croit voir dans la longueur de l'année sont du même ordre de grandeur que les erreurs de construction, d'observation et d'installation.

Théon analyse ces causes d'erreur dans plusieurs endroits ⁽¹⁾ : l'erreur de construction se ramène pour lui à des déviations ou des imprécisions ; ou bien il peut y avoir des erreurs de graduation (que Théon compte comme une erreur distincte des inexactitudes de construction) ; ou bien on peut se tromper dans les calculs lorsqu'on fait la réduction des opérations méridiennes. Parmi les erreurs d'installation des instruments méri-

(1) (Cfr. Med. 28.18, fol. 129v. τὸ μὴ ἀστραβῶς καὶ ἀκριβῶς κατασκευάσθαι. Dans le cas de l'armille méridienne la déviation, μὴ ἀστραβῶς, est sans doute ce que nous appelons un défaut de collimation : la ligne de visée serait oblique sur l'axe de rotation. Cette obliquité peut même être variable si l'armille intérieure ne reste pas exactement dans le même plan quand on la fait tourner.

diens, il compte ne pas les mettre dans le plan du méridien ⁽¹⁾, soit en traçant mal la méridienne, soit en ne plaçant pas l'armille verticalement.

Chose curieuse, nous n'avons pas trouvé parmi ces causes d'erreur, précisément celle que l'analyse des observations révèle le plus nettement : ne pas déterminer exactement à quel point de la graduation correspond l'équateur ⁽²⁾. On y faisait pourtant attention, au moins implicitement, puisque l'on constate qu'Hipparque a amélioré son équateur. De même on ne mentionne pas l'erreur d'observation proprement dite.

Dans les traités modernes d'astronomie, on trouve également des analyses de causes d'erreurs dans l'emploi des instruments. C'est pour calculer ensuite l'influence de ces erreurs sur le résultat. Théon, à la suite de Ptolémée, procédait déjà de la même façon. Mais il se contente de donner un échantillon des calculs de ce genre ⁽³⁾ : supposant l'armille correctement installée dans le plan du méridien, quel sera le résultat d'une erreur de 6' dans la distance zénithale, causée par la graduation ou l'installation ?

On oublie de nouveau de parler d'une erreur d'observation, très possible. Théon montre qu'aux équinoxes, à 6' de déclinaison correspond un arc d'écliptique de 15'. Cette donnée lui est fournie par la table des déclinaisons.

(1) Cfr. Med. 28.18, fol. 130^v. Texte fort lacuneux : ἤτοι μὴ ὑγιῶς λαμβανομένης τῆς μεσημβρινῆς εὐθείας ἢ καὶ αὐτοῦ τοῦ μ<εσημβρινου> κρίκου μὴ τὴν πρὸς ὀρθὰς <τῷ ὀρίζοντι> θέσιν λαμβάνον <τος>.

(2) Cette erreur d'équateur pourrait être provoquée aussi par une erreur d'installation : pour déterminer l'équateur par la méthode qui a été décrite plus haut, il faut six mois si on exécute toute l'opération ; l'erreur d'équateur est alors une erreur d'observation. Mais si l'on ne veut pas appliquer la méthode en entier, on placera l'équateur a priori, d'après sa distance zénithale connue. Si on a installé l'armille de manière que le point censé représenter le zénith se trouve un peu déplacé vers le sud, on aura un équateur trop au sud : 6' correspondent à une fraction de millimètre. Cette méthode abrégée n'a pas dû être suivie ; sans quoi le zénith de l'appareil ayant autant de chances d'être déplacé vers le nord que vers le sud, on n'aurait pas une erreur d'équateur toujours dans le même sens. Une troisième façon de faire serait d'observer un solstice et de placer l'équateur d'après la valeur admise pour l'obliquité de l'écliptique. Comme on avait adopté pour l'obliquité une valeur beaucoup trop élevée, si le solstice observé était un solstice d'été, l'équateur serait mis trop au sud. Mais il n'y avait aucun motif de ne partir que du seul solstice d'été ; des observations partant du solstice d'hiver mettraient l'équateur trop au nord. Finalement, on arrive à la conviction que la position de l'équateur a bien été déterminée de la façon qui est expliquée par Théon.

(3) Cfr. Med. 28.18, fol. 130^r. Texte fortement lacuneux : κὰν τῷ τρισχιλιοστῷ ἑξακκοσιοστῷ μέρει τοῦ διὰ τῶν πόλων κατὰ τὴν διαίρεσιν <ἢ> καὶ τὴν θέσιν διαμαρ<τάνωμεν> ἔστιν πλάτους ἤτοι λοξῷ<σεως τὸ τοσ> οὗτον διάφορον, <δσον> ὁ ἥλιος <ἀπέχει ἀ>π' αὐτοῦ τοῦ ἡμερινοῦ, <τέταρτον> μίας ἡμέρας κινήσεως, δι' <ἀ τὸ ἐν τῷ τῆς> λοξώσεως κανόνι, τοῖς <ἑξηκοστοῖς> τοῦ μεσημβρινοῦ ἑξήκο<στά ιε> παράκεισθαι > ἢ κατὰ τὸ πρῶτον τοῦ <διὰ μέσων σελίδιον, τῇ α'> μοίρᾳ τοῦ ζωδιακοῦ, <παράκεισθαι ἑξήκοστὰ κδ ἐν τῷ> τοῦ μεσημβρινοῦ <σελιδίῳ, ἃ ἀναγ> καίον κινεῖσθαι ἐν τετάρτῳ <τῆς μίας ἢ> μέρας ἔγγιστα, τούτέστιν ἐν ἰ<σημεριναῖς> ὥραις ζ. Suit l'explication de la même chose sur une figure.

sons (Alm. 80) qui donne 1° de l'écliptique pour 24' de déclinaison. Or le soleil se déplace de 15' sur l'écliptique en $\frac{1}{4}$ de jour environ. Donc une erreur de 6' entraîne aux équinoxes une erreur de $\frac{1}{4}$ de jour. Théon recommence son raisonnement sur une figure, mais il ne nous apprend rien de plus que dans ce que nous venons de résumer.

Il reprend le calcul pour le solstice d'été, et montre, toujours à l'aide de la table des déclinaisons, qu'une erreur de 6' en déclinaison entraîne une erreur de 5 jours sur la date du solstice. Hipparque (Alm. 195.1) admettait qu'aux solstices, lui-même et Archimède avaient pu se tromper de $\frac{1}{4}$ de jour tant dans l'observation que dans la réduction par le calcul. Théon ⁽¹⁾ montre que cela correspond à une erreur en déclinaison de $\frac{1}{432000}$ du cercle, ce qui fait 0°0'0"0'''30^{iv}. Comme il semble totalement dépourvu du sens de l'humour, il faut croire que c'est très sérieusement qu'il ajoute : « il n'est pas paradoxal qu'une différence si minime ait échappé à l'attention ».

On peut se demander, même, si la méthode exposée ci-dessus, p. 220, a pu servir à déterminer l'instant du solstice, puisqu'Hipparque n'admet que $\frac{1}{4}$ de jour d'erreur chez lui et chez Archimède. Cette méthode doit donner des résultats satisfaisants lorsqu'il s'agit de mesurer le maximum de déclinaison que le soleil atteint au solstice : c'est le problème qui se pose au 1^{er} livre, puisqu'on y cherche quelle est l'obliquité de l'écliptique ⁽²⁾. Mais lorsqu'on voulait trouver l'instant du solstice, avec les instru-

(1) Cfr. Med. 28.18, fol. 130^r. ἐὰν δὲ πρὸς τοῖς τροπικοῖς τηροῦντες τοσοῦτον διαμαρτῶμεν, ε ὅλων ἔγγιστα ἡμερῶν τὴν διαφωνίαν εὐρήσομεν, διὰ τὸ τοῖς ε ἔξηκοστοῖς τοῦ μεσημβρινοῦ ἐπιβάλλειν πρὸς τοῖς τροπικοῖς ἐν τῷ αὐτῷ τῆς λοξώσεως κανονίῳ τοῦ ζῳδιακοῦ μοῖραι ε ἔγγιστα. ἐπειδὴ περ ταῖς μὲν ἀπὸ τοῦ ἰσημερινοῦ μοῖραις πε τοῦ ζῳδιακοῦ παρὰ<κείνται τοῦ με>σημβρινοῦ μοῖραι κγ με ταῖς <δὲ μοῖραις η, κγ να>, ε ἔξηκοστοῖς πρώτοις τοῦ μεσημβρινοῦ π<αράκεινται τοῦ> ζῳδιακοῦ μοῖραι ε, <καὶ ἔσται πενθ>ῆμερον ἔγγιστα διορθ<ούμενον τὸ εὐρὴ>μενον ἀμάρτημα. ὥστε <τέταρτον τῆς> μιᾶς ἡμέρας περὶ τὰς <τροπικὰς διαφερόν>τες δ τε Ἱππαρχος καὶ ὁ Ἀρ<χιμήδης, τρισκαίτεσσαρακοντα>κις μυρίῳ καὶ δισχιλί<ο>στω τοῦ κύκλου κατὰ> τὴν διαίρεσιν ἢ τὴν θέσιν <τῶν ὀργάνων> ἢ καὶ τοὺς ἐπιλογισμοὺς <διημέρ<τανον>, > ὅπερ <οὐ> παρὰδοξόν ἐστιν <τηλικοῦτον ὄν τῇ> αἰσθ<ήσει> διαπίπτειν ὥστε <τὸ τοιοῦ>τον <ἀμάρ>τημα περὶ τὰς τηρήσεις <blanc de 3 lettres> ται, <μᾶλλον> ἐν ταῖς τροπαῖς αἰσθητὴν ποιεῖται τὴν ἀνισότητά τοῦ χρόνου ἥπερ ἐν ταῖς ἰσημερίαις.

(2) Ptolémée, Alm. 68, exprime son résultat à 5' près : l'arc de méridien qui sépare les deux tropiques est compris entre 47°40' et 47°45'. Cela fait pour l'obliquité entre 23°50' et 23°52'30". Dans ses calculs il prend 23°51'20" qui est la valeur admise par Eratosthène. Cette valeur est trop élevée, même pour l'époque d'Eratosthène : en calculant l'obliquité de l'écliptique à l'aide de la formule de Fotheringham (cfr. 7, p. 411. — 10, p. 11. — P. NEUGEBAUER, *Astronomische Chronologie*, Berlin 1927, p. 35) on trouve. en — 250, époque d'Eratosthène, 23°43'40",10 ; en — 150, époque d'Hipparque, 23°42'55",65 ; en — 50, 23°42'11",29 ; en + 50, 23°41'26",05 ; en + 150, époque de Ptolémée, 23°40'40",94. Il y a donc dans les mesures de l'obliquité de l'écliptique retenues par Ptolémée au 1^{er} livre de l'Almageste, une erreur de 10' environ : cette erreur est notablement plus petite que celles qu'impliquent les mesures d'équinoxes retenues par lui dans le présent chapitre.

ments méridiens dont on disposait elle devait être pratiquement inutilisable.

Là n'est pas la question, d'ailleurs : ce qui nous intéresse, c'est de constater que Ptolémée, et Théon à sa suite, songeaient à calculer de combien l'on pouvait se tromper dans une observation. Ils étaient capables de faire des calculs de ce genre à propos des autres causes d'erreur qu'ils énumèrent : par exemple, supposant que la méridienne est mal tracée, ils n'avaient qu'à utiliser la table des distances azimuthales des signes du zodiaque au livre 2 de l'Almageste (p. 174, sqq.) comme ils ont utilisé celle des déclinaisons du livre 1. Évidemment, de ce qu'ils étaient capables de le faire ne suit pas nécessairement qu'ils l'ont fait.

L'armille équatoriale, nous l'avons vu p. 223, donne presque automatiquement l'instant de l'équinoxe. Mais on s'en défiait, au point que nous n'osons pas la compter comme un instrument astronomique proprement dit. On lui reprochait d'être un instrument fixe et non réglable à volonté. Et concrètement, on l'accusait de donner des indications fantaisistes.

Ici se place la fameuse question du double équinoxe : l'armille équatoriale irait jusqu'à indiquer deux fois l'équinoxe le même jour.

Avant de tenter une explication, reprenons les textes à expliquer. Il est fait deux fois mention de faits de ce genre, Alm. 196.7 et 197.17.

La première fois, dans un texte qui doit provenir d'Hipparque, et que nous avons cité p. 224 : l'an 32 de la 3^e période de Callipe, Hipparque a observé l'équinoxe de printemps le 27 Mechir (24 Mars — 145) au matin ; et, dit Hipparque, le cercle d'Alexandrie a été éclairé des deux côtés également vers la 5^e heure.

La seconde fois, dans un passage de Ptolémée que nous avons également reproduit p. 224 : on y parle des deux cercles équatoriaux de la Palestre qui ne sont plus correctement installés, surtout le plus grand et le plus ancien des deux, « au point que parfois, leur face interne a présenté le » renversement d'éclairage deux fois au même équinoxe ».

Ces deux faits sont souvent confondus. Le premier a pourtant une explication toute simple : c'est qu'Hipparque a observé à Rhodes, avec ses appareils, l'équinoxe au matin, et que l'armille équatoriale du Portique carré à Alexandrie, a marqué l'équinoxe à 5 heures. C'est cela que Théon⁽¹⁾ comprend, et il pouvait encore avoir en main le texte d'Hipparque lui-même.

L'autre fait est moins simple à expliquer. D'ordinaire on met cela sur le compte de la réfraction, mais sans chercher plus loin : cela semble être une question réglée depuis Delambre. On explique même par la réfraction le double équinoxe mentionné par Hipparque, pour lequel nous venons de proposer une solution plus naturelle.

(1) Cfr. Med. 28.18. fol. 129v.

Nous ne trouvons nulle part cette explication par la réfraction appuyée sur des calculs. Évidemment, il ne peut être question que de calculs fort approximatifs, puisqu'il s'agit de réfraction près de l'horizon et qu'en outre on ne nous donne ni la température, ni la pression atmosphérique, ni la quantité de vapeur d'eau contenue dans l'air, tous éléments que les tables font entrer en ligne de compte. Mais tout de même, en se servant de données relatives à une température et une pression arbitrairement choisies ⁽¹⁾, on obtiendra des résultats qui permettront d'apprécier plus justement cet essai d'explication.

Voici, pour avoir une base de discussion, comment le paradoxe est expliqué par Manitius ⁽²⁾ : Supposons d'abord, (au printemps) que le soleil se lève ayant une déclinaison exactement compensée par la réfraction. L'appareil enregistre donc l'équinoxe. Le soleil s'élevant sur l'horizon, la réfraction diminue, la position apparente du soleil revient au sud de l'équateur. Au bout d'un certain temps le véritable équinoxe se produit et l'appareil l'enregistre de nouveau.

Où bien, le soleil atteint, peu après son lever, une déclinaison telle qu'elle se trouve compensée par la réfraction. Les mêmes phénomènes vont se reproduire.

En automne, chose que Manitius n'ajoute pas, les mêmes phénomènes vont se reproduire en ordre inverse : d'abord l'équinoxe vrai ; puis en plongeant vers l'horizon, le soleil atteint les distances zénithales où la réfraction compense la déclinaison sud qu'il a atteinte : un second équinoxe est enregistré.

Examinons ces explications de plus près. Supposons d'abord qu'au moment où le centre du soleil franchit réellement l'horizon la réfraction le relève assez pour que la déclinaison soit exactement compensée. Pour une latitude géographique de 30° (à peu près celle d'Alexandrie) une obliquité de l'écliptique de 23°40' (environ celle du temps de Ptolémée) et une correction de réfraction de 35', une résolution de triangle sphérique montre facilement que la déclinaison ainsi compensée est 17°16'', ce qui corres-

⁽¹⁾ Cfr. p. ex. M. ALLIAUME, *Cours d'astronomie*, Louvain, 1920, p. 109 ; Pour une température de 10° C. et une pression de 760 mm, on a :

distance zénithale :	0°	3°	15°	50°	75°	85°	89°	90°
correction de réfraction :	0"	3"	16"	1'9"	2'33"	9'47"	24'25"	34'54"

Cette correction est destinée à être retranchée de la hauteur apparente pour trouver la hauteur réelle.

Dans les problèmes sur l'heure du lever du soleil on doit tenir compte du diamètre apparent du soleil. L'équinoxe est le moment où le centre du soleil se trouve sur l'équateur. On doit donc, ici, ne considérer que le centre du soleil, et calculer comme si le soleil était un point.

⁽²⁾ K. MANITIUS, *Ptolemäus Handbuch der Astronomie*, vol. I, Leipzig 1912, p. 427 n. 21.

pond à une longitude de $42^{\circ}26''$: le soleil doit donc, au moment où le faux équinoxe se produit, parcourir encore près de $43'$. Mais en cette saison le soleil ne reste que 12 heures au dessus de l'horizon et l'équinoxe vrai se produira pendant la nuit. L'armille va pourtant enregistrer un 2^e équinoxe ce jour là : en effet, lorsque le point vernal se couche ou est près de se coucher, le point 90° de l'écliptique est près de sa culmination. Or, sous la lat. 30° , ce point n'est pas fort loin du zénith lorsqu'il culmine. Donc au moment où le point vernal est près de se coucher, l'écliptique est presque vertical à Alexandrie, et la réfraction, qui relève l'astre dans le sens vertical, a presque son effet maximum sur la longitude du soleil : les quelque $15'$ qui restent à parcourir sur l'écliptique se trouvent ainsi compensés un peu avant le coucher du soleil. Ce second équinoxe, tout aussi faux que le premier, ne peut pas être distingué du vrai par les anciens ; d'ailleurs si les anciens notaient l'heure de ce second équinoxe comme si c'était le vrai, cette observation serait bonne à 6 h. près, et dans la notation d'Hipparque, elle serait correcte.

Pour avoir l'enregistrement d'un équinoxe faux et d'un vrai, il faut donc que le soleil à son lever soit à moins de 12 h. de son passage au point vernal. Sa déclinaison est alors de moins de $12'$. Le problème est plus facile à résoudre si au lieu de se donner la latitude géographique du lieu, on se donne l'angle que fait avec l'équateur le vertical passant par le centre du soleil (et qui est peu différent de la latitude). En le prenant égal à 30° et en résolvant le triangle rectangle formé par l'équateur, le vertical prénommé et le méridien qui passe par le centre du soleil, on trouve la valeur de la correction de réfraction qui amène le soleil sur l'équateur. Cette valeur est $24'$, qui d'après la n. 1 de la p. 231 correspond environ à une hauteur de 1° , atteinte à Alexandrie environ 5 minutes après le lever du soleil. L'équinoxe vrai se passera dans l'après midi, peu avant le coucher du soleil.

Cherchons maintenant quelle est la limite inférieure du phénomène : elle est atteinte lorsque le faux équinoxe sera tellement rapproché du vrai qu'on ne pourra pas les distinguer. Plus haut, à la fin de la n. 1, p. 223, nous avons trouvé que l'armille équatoriale ne permettait pas d'évaluer une déclinaison du soleil inférieure à $4'$. Les deux équinoxes se confondront lorsque le soleil sera sur l'écliptique à $12'$ du point vernal au moment où il se lève. Alors une demi-heure après le lever du soleil, se produit le faux équinoxe, et vers 11 h. $\frac{1}{2}$ du matin, le vrai ⁽¹⁾.

Mais le faux équinoxe ne tromperait personne. En effet, avant qu'il ne

(1) Précisément les deux heures signalées par Hipparque (ci-dessus, pp. 224 et 230). Mais la suite montrera que l'explication par la réfraction est peu probable pour le cas mentionné par Ptolémée. A fortiori pour celui d'Hipparque.

se produise, le soleil était plus bas sur l'horizon ; la réfraction était plus forte. Par conséquent le soleil était rejeté au nord de l'équateur. Le faux équinoxe serait donc enregistré, au mois de Mars, comme un équinoxe d'automne. Le vrai au contraire serait enregistré comme un équinoxe de printemps, le soleil passant du sud au nord. Seul un débutant s'y laisserait prendre ⁽¹⁾. Il serait parfaitement oiseux de mentionner parmi les défauts de l'appareil, une indication qui ne peut induire personne en erreur.

Ensuite Ptolémée dit que le phénomène se produit parfois, évioie. En réalité, on vient de voir que le phénomène de réfraction produit toujours un faux équinoxe : la moitié du temps bien nettement ; et lorsque le double équinoxe ne se produit pas nettement, le soleil a l'air de mettre quatre à cinq heures pour franchir l'équateur.

Puis, s'il s'agissait d'un phénomène de réfraction, tous les cercles équatoriaux en seraient également affectés. Mais l'Almageste semble indiquer que le plus ancien et le plus grand des deux y est plus sujet que l'autre, ou donne de moins bonnes indications que l'autre.

Cherchons donc plutôt dans la direction indiquée par Ptolémée.

Il n'est pas impossible que la phrase de Ptolémée ne signifie tout simplement que les deux armilles de la Palestre ont enregistré l'équinoxe à deux heures différentes. évioie s'expliquerait alors parce que la plus vieille des deux serait descellée et pourrait se déplacer légèrement ; ou bien la dalle dans laquelle elle est scellée ne resterait plus tout à fait immobile : ces appareils ne semblent pas s'être trouvés dans un observatoire. Si la palestre était réellement ce que son nom indique, on ne se faisait probablement pas faute de marcher sur le support. Chacun de nos lecteurs a pu, en marchant sur un trottoir dallé, constater que cela peut suffire à produire un mouvement. La difficulté de cette explication est que dis semble plutôt indiquer que le même appareil a marqué deux fois l'équinoxe. Théon nous viendrait bien à point, ici, pour nous expliquer la nuance précise de ce mot. Malheureusement, il ne dit rien là-dessus.

Une autre explication rendrait mieux compte de toute la phrase : c'est que la plus vieille des deux armilles, non seulement s'est déplacée, et penche un peu vers l'Est, mais qu'en outre elle est voilée : si par exemple elle est scellée du côté nord, et en même temps supportée par un pied, simple baguette de métal, du côté sud, elle aura une tendance à se laisser aller du côté Est et Ouest. Si elle a deux coudées de diamètre, il suffit qu'un de ses points soit à 1 mm 3 en dessous du plan de l'équateur, pour qu'elle

(1) Si l'on peut se fier à l'Optique de Ptolémée telle qu'elle est parvenue jusqu'à nous, Ptolémée sait fort bien que la réfraction relève les astres au-dessus de l'horizon. En tous cas nous avons montré ailleurs à propos de l'instrument parallactique, que l'on se défiait de la réfraction aux environs de l'horizon, et que depuis Archimède on s'occupait de la réfraction. Si Ptolémée n'en parle pas ici, ce n'est certainement pas parce qu'il l'ignore.

indique l'équinoxe lorsque le soleil passe en face de ce point, ayant une déclinaison sud de 5'. L'armille étant voilée peut avoir d'autres portions correctement placées dans le plan de l'équateur. Ces portions indiqueront l'équinoxe vrai. Comme cela suppose des coïncidences, le phénomène se passera parfois, éviote, et pas toujours. Il est d'ailleurs facile de le représenter, en traçant en projections l'armille correctement placée dans un plan debout, puis en ajoutant l'armille voilée et penchée vers l'Est, ou seulement voilée : on verra immédiatement la relation qui s'établit entre la déformation arbitrairement choisie et l'azimut du soleil qui pour une certaine déclinaison donne le faux équinoxe.

Tout cela naturellement n'est qu'hypothèse, mais cette hypothèse nous paraît mieux rendre compte de nos documents que celle de la réfraction.

10. Précautions prises pour pallier les erreurs. — On se plaint ⁽¹⁾ de ce que les anciens n'ont pas décrit leurs procédés d'observation et les précautions qu'ils ont pu prendre. Peut-être se plaindra-t-on dans le cas présent, de ce que leurs procédés d'observation sont connus avec trop de détails et que les anciens ont trop parlé des erreurs qui les guettaient.

Indiquons brièvement leurs précautions. D'abord, cela va sans dire, on éliminait complètement les appareils suspects : le gnomon, dont le nom n'est même pas prononcé dans ce chapitre, et l'armille équatoriale : ainsi, au 27 Mechir 32 de la 3^e période de Callippe, nous avons vu qu'Hipparque mentionnait une observation d'équinoxe faite à l'aide d'une armille équatoriale. Mais cette observation n'est pas introduite dans les calculs. Malheureusement pour Hipparque, car il se faisait précisément que cette observation-là était meilleure que celle qu'il a retenue.

Ensuite, pour déterminer la longueur de l'année, objet du chapitre que nous venons d'analyser, on choisit deux observations qui, tout en réunissant certaines garanties d'exactitude, sont aussi distantes que possible : l'erreur d'observation, expliquent Ptolémée et Théon ⁽²⁾, est ainsi divisée par un nombre plus grand. Cela implique que Ptolémée n'avait pas conscience d'un progrès sensible dans la fabrication des instruments entre l'époque d'Hipparque et la sienne : et en effet, il y a plutôt recul, si l'on compare les observations d'Hipparque et celles de Ptolémée aux dates calculées d'après ces tables modernes.

Lorsque l'équinoxe ne tombe pas à midi, l'heure où le soleil franchit l'équateur doit être calculée. Comme on utilise à cet effet la table des déclinaisons, ce calcul consiste en fait en une interpolation proportionnelle. Théon se rend bien compte aussi ⁽³⁾ que dans ces calculs on néglige

⁽¹⁾ P. TANNERY, *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne*, Paris, 1893, p. 117.

⁽²⁾ Cfr. Med. 28.18, fol. 134^{re}.

⁽³⁾ Cfr. Med. 28.18, fol. 131^{re}.

l'anomalie du soleil et l'on fait implicitement intervenir la donnée 365 $\frac{1}{4}$ jours pour la longueur de l'année tropique. L'erreur entraînée par ces approximations est d'autant plus petite que le temps à calculer est plus court. Aussi conseille-t-il de partir de l'observation méridienne la plus proche de l'équinoxe. On la reconnaît à ce qu'elle fournit la plus petite valeur absolue de la déclinaison.

NOTE BIBLIOGRAPHIQUE

1. Nous citons l'Almageste d'après l'édition Heiberg : CLAUDII PTOLEMAEI *Syntaxis mathematica*, ed. Heiberg. 2 vols. Leipzig, Teubner 1898 et 1903 (cité en abrégé : Alm. et le numéro de la page du premier volume).

2. PAPPUS, *Commentaire sur les livres 5 et 6 de l'Almageste. Studi e Testi* 54, Rome 1931.

3. THÉON D'ALEXANDRIE, *Commentaire sur les livres 1 et 2 de l'Almageste. Studi e Testi* 72, Città del Vaticano 1936.

4. NICOLAS HALMA, *Commentaire de Théon d'Alexandrie sur le premier livre de la composition mathématique de Ptolémée*. Tome I. Paris 1821. — Tome II (contient le livre 2). Paris 1821. La suite n'a pas paru.

Travaux modernes sur la question :

5. J. K. FOTHERINGHAM, The determination of the accelerations and fluctuations in the motions of the sun and moon. *The Observatory* 55 (1932), p. 305-315 (grandes lignes de la question).

6. J. K. FOTHERINGHAM, Note on the secular accelerations of the sun and moon as determined from the ancient lunar and solar eclipses occultations and equinox observations. *Monthly notices of the royal astronomical society* 80 (1917/20), p. 578-581 (Sommaire des résultats obtenus à diverses reprises par Fotheringham).

7. J. K. FOTHERINGHAM, The secular acceleration of the sun as determined from Hipparchus' equinox observations ; with a note on Ptolemy's false equinox. *Monthly notices* 78 (1918), p. 406-423 (analyse du présent chapitre de l'Almageste ; application de la théorie des erreurs aux observations d'équinoxes qui s'y trouvent contenues).

8. J. K. FOTHERINGHAM et G. LONGBOTTOM, The secular acceleration of the moon's mean motion as determined from the occultations in the Almagest. *Monthly notices* 75 (1915), p. 377-394 (rien que les occultations du 7^e livre de l'Almageste).

9. K. SCHOCH, Die säkulare Acc-leration des Mondes und der Sonne. *Astronomische Nachrichten, Ergänzungsheft* 8,2 (1921), p. B2 à B5 (basé sur les travaux de Fotheringham, mais poussant la question plus loin).

10. K. SCHOCH, Die Neubearbeitung der Syzygientafeln von Oppolzer. *Mitteilungen des astronomischen Recheninstituts Berlin-Dahlem* 2,2 (1928), (passe pour être la meilleure table d'éclipses ; malheureusement inutilisable si l'on n'a pas à côté les Syzygientafeln de von Oppolzer ; dans sa préface, Schoch donne une formule pour la longueur de l'année tropique, dont nous avons fait usage dans le présent travail chaque fois que nous avons voulu contrôler la durée de longs espaces de temps évalués par les anciens).

11. DE SITTER, De seculaire acceleraties en de fluctuaties in de lengten van de maan, de zon, Venus en Mercurius, en de rotatie der aarde. *K. Ak. Wetenschappen Amsterdam. Verslag van de gew. vergad. der afd. natuurk.* 36 (1927), p. 451-464 (nous n'avons pas

ju l'édition anglaise dans *Bulletin of the astronomical Institutes of the Netherlands* 4 (1927), p. 21-38, qui ne fait pas double emploi avec l'édition néerlandaise. Il ne nous appartient pas de discuter aucun des travaux que nous venons de citer, et qui nous ont beaucoup aidé. Notons pourtant, à propos de ce dernier, que ni CLEOMÈDE, *De motu circulari*, ed. Ziegler, Leipzig 1891, p. 172, 20, ni Pappus, op. cit., 2, p. 68, 5, ou ed. Bâle 1538. p. 256, ne disent que l'« éclipse d'Hipparque » a été observée sur un plan déterminé d'avance ; le motif d'accorder une importance spéciale à l'équation 3 de M. de Sitter [cfr. p. 453] ne semble donc pas justifié ; l'année de l'éclipse n'est même pas rapportée ; tant Fotheringham que Schoch ont balancé entre les deux dates possibles 15 Août — 309 et 20 Novembre — 128 ; quant à Théon, c'est par suite d'une erreur de Hultsch qu'on en parle à propos de cette éclipse-là. De même, à la suite de Schoch et Fotheringham, M. de Sitter considère comme seule « betrouwbaar » une éclipse de lune arrivée tout de suite après le coucher du soleil ; on verra dans la 2^e partie du présent travail qu'il y a peut-être des réserves à faire sur les idées de Schoch au sujet des erreurs de la clepsydre et des notations d'heure la nuit dans l'antiquité).

Les autres travaux utilisés sont cités dans les notes.

Deuxième Section

Physique et Chimie

M. A. Van Itterbeek fait une communication orale sur la mesure de l'absorption du son dans l'anhydride carbonique.

M. M. de Hemptinne expose des questions relatives aux spectres Raman de composés de deutérium.

Après la séance, où furent présentés les travaux reproduits ci-après, M. le Professeur A. Van Itterbeek montra aux membres de la Section les installations du laboratoire cryogène de l'Université, qu'il dirige, M. le Professeur M. de Hemptinne leur montra celles du laboratoire de spectroscopie, dont l'Université lui a confié la direction.

Désintégration et radioactivation artificielles

Les expériences de désintégration et de radioactivation artificielles continuent avec des succès répétés. Elles sont fondamentales tant à cause des horizons qu'elles permettent d'entrevoir pour les applications futures qu'à cause de la contribution primordiale qu'elles apportent au problème de la physique nucléaire. Il est donc intéressant de temps en temps de faire le point, de grouper les résultats épars afin de bien connaître tout le matériel dont on dispose. C'est la tâche que s'étaient imposés J. Curie-Joliot, Grinberg et Walen dans les Tables annuelles de constantes et données numériques (188). J'avais aussi groupé la plupart des résultats obtenus en 1935 dans une publication de mars 1936 (186). Diebner et Grassmann (149) avaient de leur côté réuni des données de radioactivation artificielle.

Les travaux de 1936 et les premiers travaux de 1937 font l'objet de l'exposé suivant. La rédaction en était à peu près terminée quand le second exposé de Diebner et Grassmann (152) m'est parvenu. Il m'a servi à compléter par endroits ma documentation.

Quel que soit le soin apporté à recueillir toutes ces données, il est bien probable que des travaux ont été omis involontairement : je m'en excuse auprès des auteurs.

Les agents actifs.

Comme précédemment les agents actifs ont été les particules α , les protons, les deutons, les neutrons et les rayons γ . Le développement des techniques de production d'ions accélérés a cependant permis d'accroître dans une large mesure les possibilités de désintégration. L'emploi de faisceaux d'électrons pour désintégrer l'aluminium n'a conduit à aucun résultat (Lewis et Burcham 172) pas plus que l'emploi de positrons (Thomson et Saxton 159).

Les résultats obtenus avec les divers éléments seront présentés dans l'ordre des numéros atomiques en considérant, chaque fois que l'occasion s'en présentera, l'action des divers agents dans l'ordre : particules α , protons, deutons, neutrons, rayons γ . Pour mémoire je signalerai chaque fois en commençant et sous une forme très

résumée les résultats acquis antérieurement ; pour ceux-ci je ne donnerai pas de références bibliographiques, on trouvera celles-ci dans les travaux rappelés ci-dessus (149, 152, 186, 188) Les radioéléments artificiels sont caractérisés par un astérisque (*) : on trouvera dans le tableau qui termine cet exposé leurs caractéristiques.

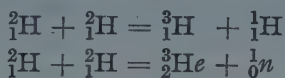
0 NEUTRON.

Dans le système périodique des éléments, le neutron peut être considéré comme l'élément de numéro 0 précédant immédiatement l'hydrogène.

Kikuchi avait conclu de certains résultats expérimentaux que le neutron pourrait se désintégrer dans certaines circonstances avec émission d'un proton, d'un électron et libération de 1 Mev. ⁽¹⁾. Gilbert, Smith et Fremlin (20) ont essayé sans succès de mettre en évidence cette désintégration.

1° HYDROGÈNE ET DEUTÉRIUM.

Action des deutons. — Les réactions suivantes étaient connues ;



Kallmann et Kuhn (54) ont fait une étude complète de ces réactions. Kempton, Browne et Maasdorp (23) ont étudié la répartition angulaire des protons et des neutrons émis. A ce point de vue, Neuert (151) a trouvé que l'émission était dissymétrique ; qu'il y a plus de rayons émis vers l'avant que dans la direction opposée et la direction normale.

Le rendement de ces réactions a fait l'objet de nombreux travaux (Döpel 164 — Burhop 171 — Bonner et Brubaker 65 — Zunn et Seeley 112 — Roberts 131 — Amaldi, Hafstad et Tuve 134). Dans les trois derniers travaux on trouve notamment les relations d'équivalence entre les sources ${}^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H}$ et $\text{Ra} + \text{Be}$ ou $\text{Rn} + \text{Be}$ pour la production de neutrons. Le rendement extrêmement intéressant en neutrons de la réaction ${}^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H}$ l'a fait employer comme source de neutrons par de nombreux auteurs (voir notamment Slack et Ehrke 158).

Action des neutrons. — Dans la bibliographie antérieure on trouve la réaction ${}^1_1\text{H} + {}^1_0\text{n} = {}^2_1\text{H} + \gamma$.

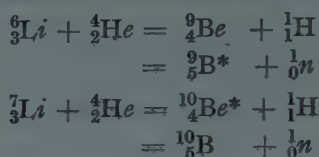
⁽¹⁾ La notation Mev sera employée pour représenter une énergie de 10^6 électronvolts.

Action des rayons γ . — La décomposition photonucléaire du deutérium était connue suivant la réaction ${}^2_1\text{H} + \gamma = {}^1_1\text{H} + {}^1_0\text{n}$.

Mitchell, Rasetti, Fink et Pegram (88) ont fait l'étude des neutrons produits par comparaison avec les neutrons résultant de l'action des rayons γ sur Be ou émis par la source ($\text{Rn} + \text{Be}$). Way (129) a fait l'étude théorique de la photodésintégration du deutérium.

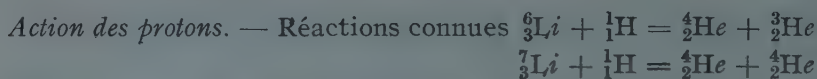
3°) LITHIUM.

Action des particules α . — On connaissait les réactions suivantes :



En plus des réactions de désintégration précédentes, il y a aussi un processus d'excitation du noyau de lithium sans capture de la particule incidente, ni désintégration, excitation suivie de l'émission d'un rayonnement γ . Speh (98-107) et Savel (160) ont fait l'étude de ce rayonnement γ . Stetter (146) a étudié les protons émis.

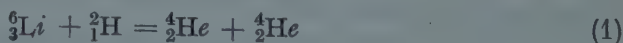
Contrairement aux réactions ci-dessus, Eckardt (167) n'a trouvé aucune radioactivation.



Roberts et ses coll. (86) ont étudié la variation du parcours des particules α produites avec l'angle d'émission, variation en parfait accord avec les prévisions basées sur la conservation de la quantité de mouvement. Hafstad et ses coll. (104) ont étudié la variation de ce parcours avec l'énergie des protons incidents. Burhop (171) a recherché le rendement dans le cas de protons de faible énergie.

La seconde au moins des réactions précédentes s'accompagne d'une émission γ de grande énergie 17 Mev. qui a été étudiée par divers auteurs (Gaerttner et Crane 116 — Delsasso, Fowler et Lauritsen 125 — Bothe et Gentner 44-46 — Alichanian 145). Ce rayonnement γ est susceptible de radioactiver par photodésintégration de nombreux éléments (46,...)

Action des deutons. — Réactions connues





Les réactions (1) et (2) ont été étudiées par Arakatsu et coll. (178) au point de vue du rendement en fonction de la tension. Rumbaugh et Hafstad (106) opérant avec des isotopes séparés du lithium ont trouvé pour la réaction (2) avec des deutons de 540 Kv deux groupes de protons de parcours moyens 25,4 et 29,6 cm. Rien de semblable ne se produit avec ${}^7_3\text{Li}$ (réaction 3); par contre avec des deutons de 500 Kv et plus on voit dans ce dernier cas apparaître l'activité β à courte période. La réaction (3) a fait l'objet de travaux de Fowler et coll. (78) et de Lewis, Burcham et Chang (16); ces derniers ont trouvé que le Be est formé dans un état excité et qu'il évolue avec émission α .

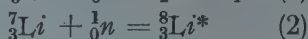
La réaction (4) a été étudiée en détail par Kempton et coll. (31) qui ont observé une distribution continue des particules α émises; ils ont exclu la possibilité de la formation de ${}^5_2\text{He}$ et ont étudié la distribution d'énergie des neutrons et des particules α ; ils en ont conclu à la formation intermédiaire d'un noyau ${}^8_4\text{Be}$, la réaction (5) étant donc un stade intermédiaire de la réaction (4).

Neuert (151) a étudié la répartition angulaire des noyaux projetés et observé qu'il n'y a pas de variation du rendement en fonction de la direction d'émission.

Amaldi et ses coll. (134) se sont occupés à déterminer le rendement en neutrons.

Enfin Breit et Wigner (130) ont fait l'étude théorique de la désintégration de ${}^8_3\text{Li}$.

Action des neutrons. — Réactions connues ${}^6_3\text{Li} + {}^1_0\text{n} = {}^4_2\text{He} + {}^3_1\text{H}$ (1)



Réaction (1). — Rotblat (9) a trouvé pour les particules α un parcours de 10,8 mm.; pour les particules ${}^3_1\text{H}$, 53,6 mm. Livingston et Hoffman (100) ont trouvé $5,73 \pm 0,05$ cm pour ce dernier parcours.

Réaction (2). — Nahmias et Walen (62, 64, 153) ont trouvé une période de 0,5 sec. alors que Veldkamp et Knol ont trouvé 0,7 sec (173) ou 0,8 sec \pm 0,2 sec (176)

4°) BÉRYLLIUM.

Action des particules α . — Réaction connue ${}^9_4\text{Be} + {}^4_2\text{He} = {}^{12}_6\text{C} + {}^1_0\text{n}$.

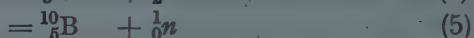
Cette réaction a été confirmée par Döpel (43). D'après Maier-Leibnitz (41) la réaction se passerait en deux temps, il y aurait d'abord

excitation du noyau résultant puis formation du $^{12}_6\text{C}$ accompagné de neutrons rapides ou de neutrons lents et de rayons γ . Bernardini et Bocciarelli (137-154) ont montré que les neutrons consistaient en 3 groupes d'énergie maxima 4,2-6,4 et 7,7 Mev. D'après Stetter (146), l'action des particules α déterminerait aussi l'émission de protons.

Action des protons. — Réactions connues $^9_4\text{Be} + ^2_1\text{H} = ^6_3\text{Li} + ^4_2\text{He}$
 $= ^8_4\text{Be} + ^1_1\text{H}$
 $= ^{10}_5\text{B} + \gamma$.

Döpel (43) a confirmé la 1^{re} réaction et montré qu'il n'y a aucune émission de neutrons avec des protons de 200 Kv environ. Allen (120) a établi qu'avec des protons de 45 à 125 Kv les deux premières réactions se produisent avec émission du même nombre de particules des deux types.

Action des deutons. — Réactions connues



Au sujet de la 1^{re} réaction, Mc Millan (82) a établi que le $^{10}_4\text{Be}^*$ radioactif formé doit avoir une longue vie dont la limite inférieure est 10 ans.

Quant à la réaction (5) Döpel (43) avec des deutons de 200 Kv environ n'a pu déceler l'émission de neutrons peut-être parce que l'effet était caché par celui de $^2_1\text{H} + ^2_1\text{H} = ^3_2\text{He} + ^1_0\text{n}$. Par contre, Bertl et ses coll. (24) ont décelé ces neutrons déjà à 25 Kv et ont étudié leur vitesse, Bonner et Brubaker (65-91) ont montré que le rendement en neutrons varie exponentiellement avec l'énergie des deutons et que ces neutrons forment 4 groupes d'énergie, 4,5-4-2,6, et 1,4 Mev. Amaldi et ses coll. (134) ont comparé l'émission neutronique à celle de $(\text{Rn} + \text{Be})$.

Action des neutrons. — Alors qu'antérieurement on n'avait trouvé qu'une activation très faible attribuée à des impuretés, Rusinov (143) a établi la probabilité de disintégration de Be par les neutrons. Bjerger (6-11) a trouvé la formation d'un radioélément de période $(0,9 \pm 0,2)$ sec; la possibilité d'entraîner ce radioélément par un courant gazeux lui fait attribuer la nature de l'hélium; il résulterait de la réaction



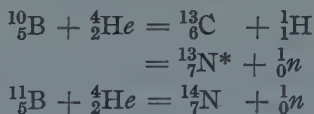
Cette radioactivation ne serait pas sensible à l'effet d'hydrogène de Fermi. Bjerger et Broström (10) ont étudié le spectre β du radio-hélium. Nahmias et Walen (64-153) ont trouvé $0,8 \pm 0,04$ sec pour la période de ${}^6\text{He}^*$.

Action des rayons γ . — Réactions connues ${}^9_4\text{Be} + \gamma = {}^8_4\text{Be} + {}^1_0n$
 $= 2{}^4_2\text{He} + {}^1_0n$.

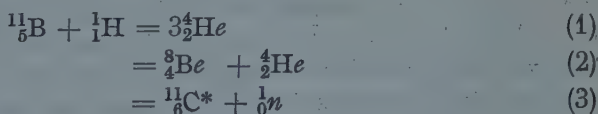
Paneth et Glückauf (17) ont confirmé ces deux réactions et montré que l'hélium était produit en quantité mesurable dans les échantillons irradiés. Le rendement en neutrons varie avec l'énergie quantique incidente (Rusinov 141 — Mamasachlisow 142); d'après Fleischmann et Gentner (39) il diminue quand l'énergie quantique croît (au-delà d'un certain seuil). Goloborodko et Rosenkewitsch (144) ont étudié la distribution angulaire des photoneutrons émis. Mitchell et coll. (88) ont observé que les photoneutrons ont une énergie moindre que les neutrons produits par les particules α et qu'ils sont produits en nombre moindre. Le libre parcours moyen des photoneutrons dans l'eau est de 5 cm. environ, alors qu'il est de 9 cm. pour les neutrons de $(\text{Rn} + \text{Be})$ (Mitchell et coll. 101). Nishida (161) a étudié le ralentissement des photoneutrons.

5°) BORE.

Action des particules α . — Réactions connues



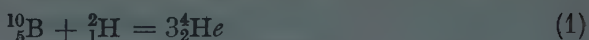
Action des protons. — Réactions connues



Divers auteurs ont recherché la variation du rendement des réactions (1) et (2) en fonction de la tension : le rendement croît exponentiellement avec l'énergie. (Arakatsu et coll. 170 — Williams et Wells 87 — Williams et coll. 434 — Gentner 50). Il y aurait une résonance dont le maximum se produit à 180 Kv.

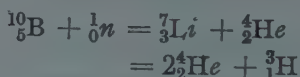
Les particules α présentent une distribution continue avec en plus un groupe homogène (Williams et Wells 87). Bothe (44) a recherché la courbe d'excitation des rayons γ qui accompagnent ces réactions. Allison (76) n'a pas trouvé de radioactivation sous l'action des protons.

Action des deutons. — Réactions connues



Cockcroft et Lewis (28) ont confirmé les réactions (2) et (6) et montré à 500 Kv la formation de deux groupes de particules α de parcours 4,5 et 14,7 cm., correspondant respectivement à chacune de ces réactions. La période du radiocarbonate (réaction 4) a été évaluée par Allison (75) à $21 \pm 0,6$ min. Bonner et Brubaker (91) ont montré que des réactions (5) et (7) la première est la plus probable. Enfin, la réaction (8) a fait l'objet de travaux de Fowler et coll. (78), qui ont déterminé à 11 Mev la limite supérieure d'énergie des électrons émis par $^{12}_5\text{B}^*$.

Action des neutrons. — Réactions connues



La première de ces réactions a été étudiée par divers auteurs : Rotblat (9) a trouvé pour les particules α un parcours de 8,18 mm.; et pour le noyau Li 3,64 mm.; Walen (60) a trouvé respectivement 8,5 mm. et 3 mm.; Haxel (42) a trouvé 2 groupes de particules α et 1 groupe de Li , l'existence de 2 groupes α étant attribuée à la production d'un noyau ^7Li dans un état excité. D'après Fünfer (165), l'énergie émise est bien en rapport avec la perte de masse. Roaf (27) a fait une étude complète de la réaction par des observations en chambre de Wilson. Au cours d'observations analogues, Neuert (151) a étudié la répartition angulaire des noyaux projetés et observé une variation du rendement en fonction de la direction. Cette réaction a un rendement fortement accru par l'effet d'hydrogène de Fermi, l'effet étant maximum pour 8 cm. d'eau (Deisenroth et coll. 155). Au cours de belles expériences, Paneth et ses coll (33) ont réussi à mettre en évidence spectralement et manométriquement l'hélium produit. Nishida (161) a montré que les photoneutrons du Be produisent des réactions. Kikuchi et ses coll. (5) ont étudié le rayonnement γ accompagnant ces réactions.

Nahmias et Walen (64, 153) ont mis en évidence la formation d'un radioélément de période 0,7 sec qu'ils attribuent à la réaction



Cependant, Bjerger (6) n'a pas réussi à mettre en évidence un radioélément de période plus petite que 1 sec.

6°) CARBONE.

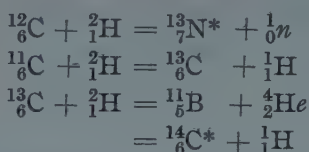
Action des particules α .

Stetter (146) a confirmé l'émission de protons précédemment attribués à la réaction ${}^{12}_6\text{C} + {}^4_2\text{He} = {}^{15}_7\text{N} + {}^1_1\text{H}$

Action des protons. — Réactions connues ${}^{12}_6\text{C} + {}^1_1\text{H} = {}^{13}_7\text{N}^* + \gamma$
 ${}^{13}_6\text{C} + {}^1_1\text{H} = {}^{13}_7\text{N}^* + {}^1_0n$

Allison (76) a trouvé pour la période du radioazote produit $10,3 \pm 0,3$ min. Kurie et coll. (68) ont donné 1,5 Mev pour la limite du rayonnement de ${}^{13}_7\text{N}^*$ (limite théorique 1,8 Mev).

Action des deutons. — Réactions connues



Bonner et Brubaker (91) ont étudié la première réaction : l'énergie maxima des positrons est de 1,16 Mev. En plus, certains de leurs résultats peuvent être attribués à la réaction



Déjà antérieurement (67) l'étude de ces réactions les avaient entraînés à une évaluation de la masse du neutrino.

Allison (76) a trouvé $10,3 \pm 0,3$ min. pour la période du radioazote Amaldi et ses coll. (134) ont recherché le rendement en neutrons de cette action des deutons par comparaison avec la source ($\text{Rn} + \text{Be}$).

Enfin, Cockcroft et Lewis (28) ont réussi à déceler les particules α provenant de la 3^e réaction.

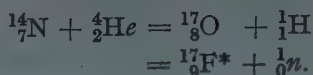
Mc Millan a trouvé un radioélément, de vie moyenne 3 mois environ, qu'il pense être le radiocarbonate de la 4^e réaction.

Action des neutrons. — Réaction connue ${}^{12}_6\text{C} + {}^1_0n = 2{}^4_2\text{He} + {}^5_2\text{He}$.

D'après Bjerger (6), le carbone ne fournit aucune activité de période inférieure à 1 sec.

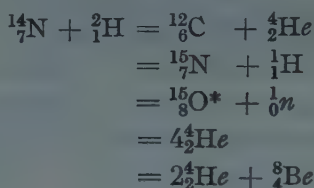
7°) AZOTE.

Action des particules α. — Réactions connues

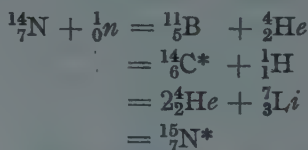


La première réaction donne naissance à 2 groupes de rayons H qui dénotent la production d'un noyau ${}^{17}_8\text{O}$ excité avec émission ultérieure de rayons γ. (Fischer 177-185 — Stetter 146-40). Meye (45) a trouvé 1,2 mm. pour la période du radiofluor et 1,2 Mev pour la limite d'énergie des ϵ^+ .

Action des deutons. — Réactions connues



Action des neutrons. — Réactions connues



Les neutrons lents produisent la 1^{re} réaction; les neutrons rapides la 2^e et la 3^e (Bonner et Brubaker 74-79). D'après Burcham et Goldhaber (170), les neutrons lents produisent aussi la 2^e réaction avec une section de choc de 10^{-24} cm² environ. Bonner et Brubaker (104) ont montré que le stade intermédiaire représenté par la 4^e réaction n'avait plus à être considéré pour rendre compte des effets observés.

Pool, Cork et Thornton (132) ont montré que les neutrons rapides (14 Mev) produits sur Li déterminent la réaction

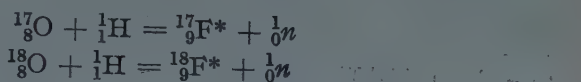


Les neutrons produits sur B (13 Mev) sont déjà beaucoup moins actifs pour produire cette réaction et les neutrons de Be (4,6 Mev) sont absolument inactifs.

8°) OXYGÈNE.

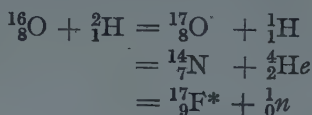
Action des protons. — Du Bridge et ses coll. (136) ont trouvé une radioactivation artificielle par les protons accélérés dont l'intensité varie avec la tension d'accélération. Les radioéléments formés, sources

d'électrons positifs de périodes $1,28 \pm 0,1$ m. et 107 ± 4 min. seraient dus respectivement aux réactions



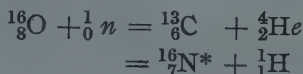
La nature chimique du radiofluor ${}^{18}_9\text{F}^*$ a été vérifiée. Il en est de même de l'émission de neutrons par l'oxygène sous l'action des protons.

Action des deutons. — Réactions connues

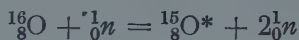


Limite supérieure d'énergie des ϵ^+ : 2,1 Mev (Kurie et coll. 75)

Action des neutrons. — Réactions connues



Chang et ses coll. (23) ont trouvé sous l'action des neutrons libérés par l'action des deutons sur Li et sur B deux radioéléments : l'un de période 8 sec. qu'ils pensent être le radioazote ${}^{16}_7\text{N}^*$ auquel d'autres auteurs avaient attribué une période de 40 sec.; l'autre de période 2 min. qui serait dû à l'expulsion d'un neutron sous l'action du neutron incident suivant la réaction

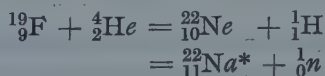


Pool et ses coll. (132) ont confirmé cette dernière réaction avec une période de 2,1 min.

Action des rayons γ . — Chang et ses coll. (23) ont trouvé une radioactivation sous l'action du rayonnement γ très pénétrant du lithium (sous l'action des protons). Ce radioélément de période 2 min. environ serait le ${}^{15}_8\text{O}^*$ dont il vient d'être question; le rendement de sa production par les rayons γ serait moindre qu'avec les neutrons.

9°) FLUOR.

Action des particules α . — Réactions connues



Pour le radiosodium ${}^{22}_{11}\text{Na}^*$ on trouve indication de périodes très

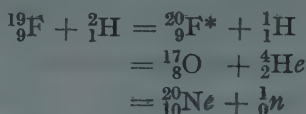
diverses : très courte — 9 min. — au moins 6 min. D'autres trouvent que cet élément est stable.

La première réaction s'accompagne d'un rayonnement γ qui a été étudié par divers auteurs (Savel 160 — Nunn May et Vaidyanathan 29 — Speh 98-107). D'après ce dernier, avec des particules α de 3,9 cm., apparaissent deux composantes γ ; avec des particules de 3,1 cm., la composante dure disparaît; il y aurait probablement un groupe de protons non encore décelé.

Action des protons. — Réactions connues ${}^{19}_9\text{F} + {}^1_1\text{H} = {}^{16}_8\text{O} + {}^4_2\text{He}$

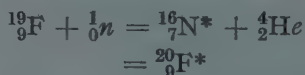
Cette réaction s'accompagne d'un rayonnement γ qui a été étudié par divers auteurs (Hafstad et coll. 104 — Delsasso et coll. 128 — Bothe et Gentner 44).

Action des deutons. — Réactions connues



Fowler et ces coll. (78) ont étudié la première de ces réactions.

Action des neutrons. — Réactions connues



En plus de ces deux réactions pour lesquelles ils trouvent les périodes respectives de 12 sec. environ et de $8,4 \pm 0,1$ sec.; Nahmias et Walen (61) ont mis en évidence l'apparition d'un radioélément de période 31 sec. attribué à



10°) NÉON.

Action des particules α . — Réaction connue



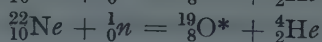
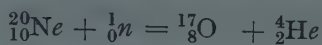
Pollard et Brasefield (115) ont trouvé un groupe de protons.

Action des deutons. — Snell (118) a mis en évidence une radioactivation sous l'action de deutons de 5 Mev



La radiofluor formé dont la nature chimique a été vérifié à une période de 112 ± 4 min. Les positrons ont une énergie maxima de 0,5 Mev.

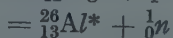
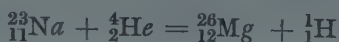
Action des neutrons. — Réactions connues



Stetter (40) a confirmé la première de ces réactions.

11°) SODIUM.

Action des particules α . — Réactions connues

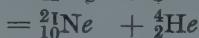
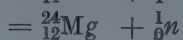


Nunn May et coll. (29) ont recherché les niveaux excités sous l'action des α du RaC'. Savel (160) a étudié le rayonnement γ émis.

Action des protons. — Réaction connue



Action des deutons. — Réactions connues



Action des neutrons. — Réactions connues



Nahmias et Walen (61-153) ont trouvé pour la 2^e réaction 33 ± 1 sec. Ils ont, en outre, trouvé un 3^e radioélément de période 8 ± 1 sec. attribué à



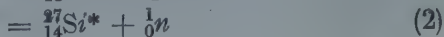
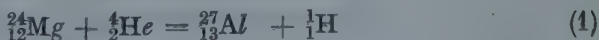
Bjerger (19) a trouvé 40 sec pour la période du radionéon et vérifié de plus la nature gazeuse de ce radioélément.

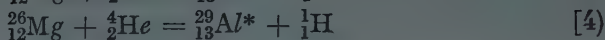
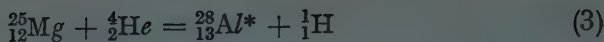
D'après Richardson (66) ${}^{24}_{11}\text{Na}^*$ émet des rayons γ de 1,2 — 2,3 et 3,4 Mev.

Kurie et coll. (68) ont trouvé la limite 1,85 Mev pour le rayonnement β de ${}^{24}_{11}\text{Na}^*$ (limite théorique 2 Mev).

12°) MAGNÉSIUM.

Action des particules α . — Réactions connues

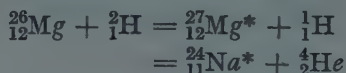




Les réactions (2), (3), (4) ont été étudiées pour diverses énergies α par Ellis et Henderson (30) qui ont trouvé les périodes respectives: 5 à 7 min. — 2,36 min. — 11 min. Chang et Szalay (35) ont recherché la formation de ${}^{28}_{13}\text{Al}^*$ pour diverses énergies du rayonnement α et déterminé les niveaux de résonance. Meye (45) a trouvé pour ${}^{27}_{14}\text{Si}^*$ une période de 2,3 min. et 1,8 Mev pour la limite d'énergie des ϵ^+ ; pour ${}^{28}_{13}\text{Al}^*$ une période de 6,6 min. et 2,75 Mev pour la limite d'énergie des ϵ^- .

Eckardt (167) a déterminé pour les mêmes radioéléments les périodes respectives de 2,2 min. et 7,6 min. Enfin Savel (160) a recherché le rayonnement γ qui accompagne ces réactions.

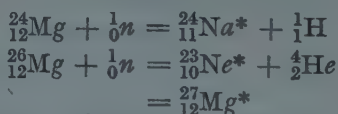
Action des deutons. — Réactions connues



Laslett (95) et Lamb (96) ont trouvé en plus de ces réactions la production d'un 3^e radioélément de période environ 9 mois et dont la limite d'énergie des ϵ^+ est de 0,4 Mev; il serait dû à



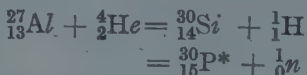
Action des neutrons. — Réactions connues



Bjerger (19) a retrouvé la période 40 sec. du ${}^{23}_{10}\text{Ne}^*$; la vérification chimique est imprécise. Booth et Hurst (37) ont déterminé une période de 15 h. pour ${}^{24}_{11}\text{Na}^*$.

13^o ALUMINIUM.

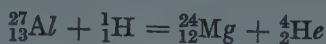
Action des particules α . — Réactions connues



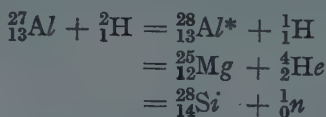
Waring et Chang (34) ont étudié la formation du radiophosphore pour diverses énergies du rayonnement α . Ils ont déterminé les niveaux de résonance, les sections de choc pour chacune des deux réactions et le rapport de production de l'une ou l'autre d'entre elles. Meye (45) a trouvé une période de 2,9 min. et une limite de

2,6 Mev pour l'énergie des ϵ^+ , Savel (160) a étudié le rayonnement émis au cours de ces réactions.

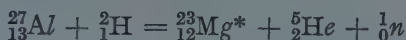
Action des protons. — Réaction douteuse



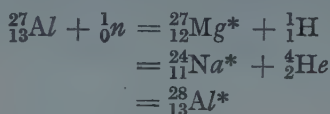
Action des deutons. — Réactions connues



Cork, Richardson et Kurie (73] ont trouvé pour la première réaction une période de 2,6 min. Le radioélément émet un rayonnement β de limite d'énergie 3,3 Mev et un rayonnement γ de 2,3 Mev. Pool et Cork (123) en plus du radioaluminium de période 2,3 min. trouvent 2 radioéléments de périodes 2,5 h et 15,8 h. Le premier pourrait être dû à la contamination par SiO_2 et serait ${}_{14}^{31}\text{Si}^*$. Le second pourrait aussi être dû à une contamination ou résulterait d'une nouvelle réaction



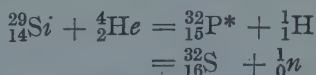
Action des neutrons. — Réactions connues



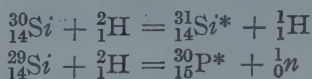
Piedad de la Cierva (163] a recherché le rapport de formation des deux premiers radioéléments suivant l'énergie des neutrons. Pose (148) a étudié la seconde de ces réactions. Booth et Hurst (37) ont confirmé les périodes indiquées pour les deux premiers radioéléments.

14°) SILICIUM.

Action des particules α . — Réactions connues

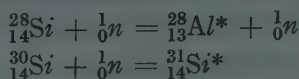


Action des deutons. — Réactions connues



Kurie et ses coll. (75) ont évalué à 1,8 Mev la limite d'énergie des ϵ^- du ${}_{14}^{31}\text{Si}^*$

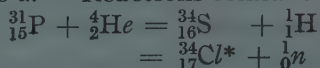
Action des neutrons. — Réactions connues



Booth et Hurst (36) ont évalué à 2,3 min. la période du radio-aluminium. Kurie et coll. (68) ont trouvé 1,85 Mev pour la limite du rayonnement β de ${}^{31}_{14}\text{Si}^*$ (limite théorique 2 Mev).

15°) PHOSPHORE.

Action des particules α . — Réactions connues

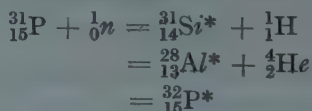


Nunn May (29) a recherché les niveaux excités dans la formation du ${}^{34}_{16}\text{S}$. Pollard et Brasefield (7-83) ont observé la distribution d'énergie des protons émis, distribution semblable à celle que l'on obtient avec Cl et K.

Action des deutons. — Réaction connue ${}^{31}_{15}\text{P} + {}^2_1\text{H} = {}^{32}_{15}\text{P}^* + {}^1_1\text{H}$.

Kurie et ses coll. (75), Lyman (114) ont trouvé pour la limite d'énergie des ϵ^- respectivement 1,8 Mev et 1,69 Mev. Paxton (71) a décelé la production d'un second radioélément de période 50 ± 10 h. émetteur d' ϵ^+ de limite supérieure d'énergie 0,9 Mev.

Action des neutrons. — Réactions connues



Alichanow et coll. (2), Lyman (94), Paxton (119) ont étudié le spectre continu du radiophosphore.

Alichanian et coll. (140) ont trouvé 14,5 j pour la période de ce radioélément et $1,95 \pm 0,1$ Mev pour la limite d'énergie des ϵ^- . Kurie et coll. (68) ont trouvé par contre 1,3 Mev. Sizoo et Kœne (174) ont trouvé une période de $15 \pm 0,1$ j.

Action des rayons γ . — Avec des rayons γ de 17 Mev, Bothe et Gentner (46-51) ont montré la formation d'un radiophosphore de période $3,0 \pm 0,2$ min.



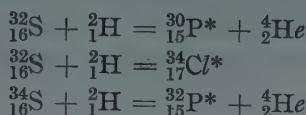
16°) SOUFRE.

Action des particules α . — Réaction connue



Brasefield et Pollard (89) ont montré que les protons émis sous l'action des particules α du ThC' peuvent se décomposer en 3 groupes. Par contre de l'examen de 700.000 trajectoires, Anthony (99-108) a conclu qu'il n'y a pas de désintégration du S sous l'action des particules α de Th (C + C').

Action des deutons. — Sous l'action de deutons de 4-6 Mev, Sagane (113) a mis en évidence la formation de 3 radioéléments qui seraient dus à



Il a étudié la distribution d'énergie des ϵ^+ du ${}^{34}_{17}\text{Cl}^*$.

Action des neutrons. — Réaction connue ${}^{32}_{16}\text{S} + {}^1_0\text{n} = {}^{32}_{15}\text{P}^* + {}^1_1\text{H}$.

Avec les neutrons produits par le cyclotron, Sagane (113) a montré la formation de ce radiophosphore (période 14 j) et en plus d'un radiosilicium (période $2,6 \pm 0,2$ h.) attribué à ${}^{34}_{16}\text{S} + {}^1_0\text{n} = {}^{31}_{14}\text{Si}^* + {}^4_2\text{He}$. Il n'a trouvé trace d'un ${}^{35}_{16}\text{S}$.

Booth et Hurst (37) ont confirmé la période de 14 j du radiophosphore. Guében (189) à la suite d'une irradiation prolongée a trouvé une activité de période (18 ± 1), jours. Cette longue période pourrait être le résultat de la coexistence de deux radioéléments, l'un de période 14 j, l'autre de période plus longue qui pourrait être ${}^{35}_{16}\text{S}$.

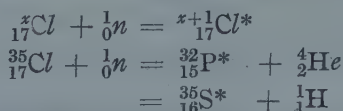
17^o) CHLORE.

Action des particules α . — Réaction connue ${}^{35}_{17}\text{Cl} + {}^4_2\text{He} = {}^{38}_{18}\text{A} + {}^1_1\text{H}$.

Pollard et Brasefield (7 — 83 — 110) ont établi l'existence de 3 groupes de protons bien définis montrant une similitude avec les cas de P et K. Pollard et ses coll. (117) ont, de plus, mis en évidence une émission de neutrons sous l'action de particules α de 5,3 cm. Ces neutrons résulteraient de ${}^{37}_{17}\text{Cl} + {}^4_2\text{He} = {}^{39}_{19}\text{K} + {}^1_0\text{n}$.

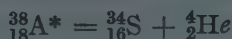
Action des deutons. — Réaction connue ${}^{37}_{17}\text{Cl} + {}^2_1\text{H} = {}^{37}_{17}\text{Cl}^* + {}^1_1\text{H}$.

Action des neutrons — Réactions connues :



Certains auteurs ont interprété leurs résultats en supposant que

dans la 1^{re} réaction $x = 37$ et que ${}^{38}_{17}\text{Cl}^* = {}^{38}_{18}\text{A}^* + e^-$



La particule α émise par ce radioargon de période 2 min. aurait un parcours de 3 mm. Roaf (36) n'a pas réussi à observer ces particules.

Andersen (3—168) a trouvé le radiosoufre ${}^{35}_{16}\text{S}^*$ de période 80 ± 10 j.

Erbacher et Philipp (169-180) ont établi des techniques permettant d'effectuer la séparation du radiochlore.

D'après Richardson (66), ${}^{17}_{17}\text{Cl}^*$ émet un rayonnement γ faible de 2,5 Mev et fort de 2 Mev.

Kurie et coll. (66) ont trouvé 4,8 Mev pour la limite du rayonnement β de ${}^{17}_{17}\text{Cl}^*$.

18°) ARGON.

Action des particules α . — Pollard et ses coll. (117) ont réussi à mettre en évidence une émission de neutrons sous l'action de particules α de parcours 5, 6 cm. La réaction pourrait être



Ils n'ont par contre pu déceler une émission de protons (115).

Action des deutons. — Réaction connue ${}^{40}_{18}\text{A} + {}^2_1\text{H} = {}^{41}_{18}\text{A}^* + {}^1_1\text{H}$.

Snell (77) a confirmé la production d'un radioélément de période (110 ± 1) min., source d' e^- . Il a vérifié la nature gazeuse du radioélément formé.

Action des neutrons. — Réaction connue ${}^{40}_{18}\text{A} + {}^1_0n = {}^{41}_{18}\text{A}^*$.

D'après Richardson (66) ${}^{18}_{18}\text{A}^*$ émet un rayonnement γ de 1,5 Mev. Le rayonnement β aurait une limite de 2,7 Mev (Kurie et coll. 68).

19°) POTASSIUM.

Action des particules α . — Réactions connues



Pollard et Brasefield (7-83-110) ont réussi à montrer 2 groupes de protons et l'indication d'un 3^e groupe, semblablement à ce que l'on a avec P et Cl.

Action des deutons. — Réaction connue ${}^{41}_{19}\text{K} + {}^2_1\text{H} = {}^{42}_{19}\text{K}^* + {}^1_1\text{H}$

Action des neutrons. — Réaction connue ${}^{41}_{19}\text{K} + {}^1_0n = {}^{42}_{19}\text{K}^*$

Walke (127) a trouvé pour ${}^{42}_{19}\text{K}^*$ une période de $12,2 \pm 0,2$ h. La limite du rayonnement β serait 3,5 Mev (Kurie et coll. 66).

20°) CALCIUM.

Action des particules α . — Réactions connues



ou



Walke (127) a étudié cette action avec formation d'un radioélément de période 4 h. qu'il croit être le radioscandium ${}^{43}\text{Sc}^*$. Pollard et Brasefield (115) ont trouvé la formation d'un seul groupe de protons.

Action des deutons. — Réaction connue



Sous l'action de deutons de grande énergie, Walke (127) a montré la formation de 5 radioéléments. Trois d'entre eux suivent le scandium au cours des réactions chimiques : ils seraient dus aux réactions



et auraient les périodes ${}^{41}_{21}\text{Sc}^*$, 52 h. — ${}^{43}_{21}\text{Sc}$, 4 h. — ${}^{44}_{21}\text{Sc}^*$, 53 min.

Un autre accompagne la séparation chimique du calcium. Il proviendrait de



et aurait une période de 2,4 h.

Enfin, un dernier accompagne le potassium. Cependant sa période de 10,5 h. fait que très probablement il n'est pas le ${}^{42}_{19}\text{K}^*$ (période 12,2 h.) admis précédemment mais plutôt un ${}^{38}_{19}\text{K}^*$ dû à



Action des neutrons. — Réactions connues



Booth et Hurst (37) trouvent un radioélément de période 16 h., qu'ils pensent être ${}^{42}_{19}\text{K}^*$. Walke (127) trouve un radioélément de période 14,5 h. lorsqu'il irradie du carbonate de calcium, radioélément absent quand il irradie du Ca métallique : il en conclut que ce radioélément ne peut être ${}^{42}_{19}\text{K}^*$ mais plutôt ${}^{24}_{11}\text{Na}^*$ provenant d'impuretés qui accompagneraient le Ca CO_3 . Les neutrons lents produisent par contre sur Ca métallique deux radioéléments : l'un de période $2,4 \pm 0,2$ h. serait ${}^{45}_{20}\text{Ca}^*$, l'autre de période 30 minutes serait dû à des impuretés ou peut-être à l'action des neutrons rapides.

21°) SCANDIUM.



Hevesy et Levi (184) ont déterminé les valeurs 16 h et 2 mois pour les périodes de ces radioéléments. Jacobsen (22) a étudié les positrons du Sc* et trouve une limite supérieure d'énergie de $1,1 \pm 0,1$ Mev.

22°) TITANE.



En plus de ce radioélément de période 3 minutes, Walke (127) trouve un radioélément de période 2,3 h. qu'il attribue à

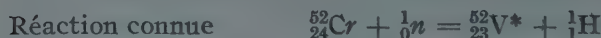


23°) VANADIUM.



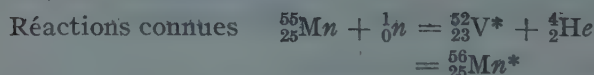
Rusinov et Latyshev (139) ont étudié l'action ralentissante du vanadium pour les neutrons.

24°) CHROME.



Booth et Hurst (37) ont confirmé cette réaction; période 3,75 min.

25°) MANGANÈSE.



Booth et Hurst (37) ont trouvé 3,75 min. pour la période du radiovanadium. La limite d'énergie du spectre β du radiomanganèse a été recherchée par divers auteurs : Gærtner et coll. (81) : 2,8 Mev; Alichanian et coll. (140) : $3,2 \pm 0,1$ Mev; Brown et Mitchell (105) : 1,2 et 2,9 Mev. Rusinov et Latyshev (131) ont étudié l'action ralentissante du manganèse.

26°) FER.

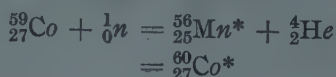


27°) COBALT.

Action des deutons. — On avait trouvé un radioélément de période

3,6 h. non-identifié. Thornton (72) a trouvé outre ce radioélément un radioélément de période 10 min. qu'il croit être dû à des impuretés de carbone et un ou plusieurs radioéléments de période de plus de 1 jour, éléments que l'on retrouve avec Ni.

Action des neutrons. — Réactions connues



Booth et Hurst (37) ont confirmé la 1^{re} réaction avec une période de 2,5 h.

Sampson et coll. (92) attribuent à la 2^e réaction une période de l'ordre de 1 an alors que la période de 20 min. trouvée antérieurement serait due à



Andersen (8) a trouvé de plus une activité qui disparaît après 72 heures : une vérification chimique a montré qu'il s'agissait d'un radiofer dû à



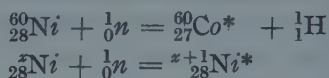
Heyn (175) a montré la formation d'un radioélément de période 11 min. qu'il attribue à ${}^{58}_{27}\text{Co}$ ou ${}^{60}_{27}\text{Co}^*$.

28°) NICKEL.

Action des deutons. — Les deutons produisent un radioélément de période $3,5 \pm 0,1$ h. non identifié.

Thornton (72-133) a vérifié par voie chimique qu'il s'agissait d'un radiocuvivre source d' ϵ^+ et de période $3,4 \pm 0,1$ h. La courbe d'excitation est différente de celle que l'on obtient par action des neutrons sur le cuivre.

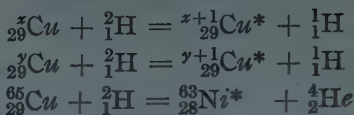
Action des neutrons. — Réactions connues



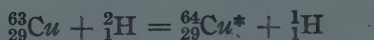
Naidu (4) a trouvé le radionickel de période 180 min. avec les neutrons lents, mais n'a rien trouvé avec les neutrons rapides. Oser et Tuck (26) ont aussi trouvé un radionickel ${}^{63}_{28}\text{Ni}$ ou ${}^{65}_{28}\text{Ni}^*$ de période 160 ± 10 min. avec les neutrons lents. Heyn (175) a aussi trouvé ce radioélément de période 160 min.; avec les neutrons de ${}^2\text{H} + {}^2\text{H}$ et de $\text{Be} + {}^2\text{H}$, rien ne se produit; par contre avec les neutrons très rapides de $\text{Li} + {}^2\text{H}$ et de $\text{Li} + {}^2\text{H} + \text{Ag} + \text{Cd}$ apparaît une activation faible de période 11 min. C'est vraisemblablement le même radioélément de période 20 min. qu'ont trouvé Booth et Hurst (37) : ${}^{60}_{27}\text{Co}^*$.

29°) CUIVRE.

Action des deutons. — Réactions connues



Van Voorhis (85-111) avec des deutons de 6 Mev trouve 2 radioéléments isotopes du cuivre; l'élément de période la plus longue ($12,8 \pm 0,1$ h.) émet des ϵ^+ et des ϵ^- en même nombre; il serait attribuable à



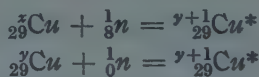
Le radiocuisse évoluerait ultérieurement soit suivant ${}^{64}_{29}\text{Cu}^* = {}^{64}_{28}\text{Ni} + \epsilon^+$, soit suivant ${}^{64}_{29}\text{Cu}^* = {}^{64}_{30}\text{Zn} + \epsilon^-$

Livingood (97-102) avec des deutons de 5 Mev trouve un radioélément de période 6 min : ${}^{66}_{29}\text{Cu}^*$ et un autre radioélément de période 130 ± 10 j. qui pourrait être ${}^{63}_{28}\text{Ni}^*$ ou plus probablement ${}^{59}_{26}\text{Fe}^*$ provenant de



L'identification chimique est toutefois très imprécise et il n'est pas impossible qu'on ait affaire à des impuretés.

Action des neutrons. — Réactions connues



Diverses périodes ont été trouvées par action des neutrons. Avec les neutrons lents on trouve une période de $6,1 \pm 0,2$ min. (Muller 55); 6 min. (Heyn 14-175; Oeser et Tuck 26 : ${}^{66}_{29}\text{Cu}$); 5 min. (Rotblat 25; Pool et coll. 132 : ${}^{66}_{29}\text{Cu}$).

Avec les neutrons rapides, on trouve une période de $10,5 \pm 0,5$ min. (Heyn); 11 min. (Rotblat); 10 min. (Pool). Ce radioélément serait dû à la réaction ${}^{63}_{29}\text{Cu} + {}^1_0\text{n} = {}^{62}_{29}\text{Cu}^* + {}^1_0\text{n} + {}^1_0\text{n}$ ${}^{62}_{29}\text{Cu}^* = {}^{62}_{28}\text{Ni} + \epsilon^+$ (Heyn, Rotblat, Pool, Chang et coll. 23). Il semble que l'activation serait due au neutron incident ralenti dans le processus et au nouveau neutron émis (Rotblat).

Booth et Hurst (37) signalent un radioélément de période plus longue que 30 min.; Oeser et Tuck (26), un radioélément de période 160 ± 10 min. qui serait un radionickel et un radioélément de période $13 \pm 0,5$ h. obtenu par les neutrons lents et qui pourrait être ${}^{64}_{29}\text{Cu}^*$. Pool et coll. (132) signalent un radioélément de période 12 h. qui pourrait être produit par les neutrons très rapides de Li et B :

$^{65}_{29}\text{Cu} + {}^1_0n = {}^{64}_{29}\text{Cu}^* + {}^1_0n + {}^1_0n$ ou par les neutrons moins rapides de Be et Cu : $^{68}_{29}\text{Cu} + {}^1_0n = {}^{64}_{29}\text{Cu}^*$.

Rusinov (139) a étudié le ralentissement des neutrons par le cuivre.

Action des rayons γ . — Bothe et Gentner (46-51) ont trouvé une radioactivation de période $10,5 \pm 0,3$ min., résultant de



rendant ainsi très probable le processus ci-dessus de radioactivation sans capture et avec émission d'un neutron.

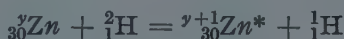
30°) ZINC.

Action des particules α . — Réaction connue

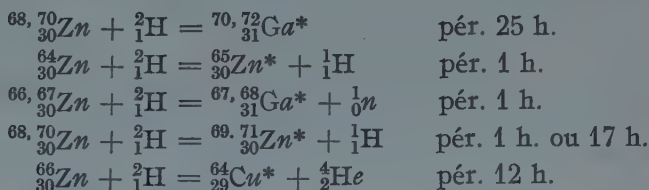


Stetter (146) a observé une forte émission de neutrons par le zinc.

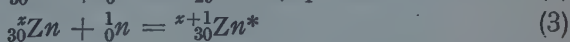
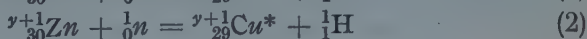
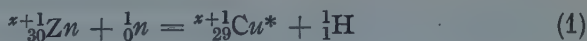
Action des deutons. — Réaction connue



Livingood (102) trouve 4 radioéléments de périodes 97 ± 10 h., 25 ± 2 h., 12 ± 1 h., $1 \pm 0,3$ h. Dans une publication antérieure (70) il signalait de plus un radioélément de période quelques minutes. La précision des réactions est assez difficile. On pourrait peut-être avoir (152)



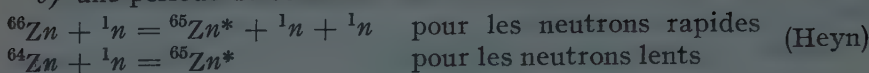
Action des neutrons. Réactions connues



D'après Heyn (14-175) il n'y a aucune activation avec les neutrons de ${}^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H}$ et $\text{Be} + {}^2_1\text{H}$; l'activation n'apparaît qu'avec les neutrons plus rapides de $\text{Li} + {}^2_1\text{H}$ et de $\text{Li} + {}^2_1\text{H} + \text{Ag} + \text{Cd}$, ou avec les neutrons ralentis dans la paraffine. On aurait ainsi

a) une période de 6 min. obtenue seulement avec les neutrons très rapides (Heyn).

b) une période de 60 minutes attribuée à



Rotblat (25) signale cette même période de 60 minutes obtenue avec les neutrons rapides. Précédemment Madsen (13) avait signalé une période de 100 min. environ qu'il attribuait à $\text{Zn} + {}^1_0\text{n} = \text{Ni}^* + {}^4_2\text{He}$ à la suite d'une séparation chimique.

c) une période de 6 heures confirmée par Booth et Hurst (37) et attribuée à



Æser et Tuck (26) n'ont pas retrouvé cette période.

d) une période de 10 heures et une de 17 heures que n'ont pas retrouvée Æser et Tuck (26). Madsen (13) signale une période de 17 heures qu'il attribue à une réaction du type (1) ou (2).

e) une période de $13 \pm 0,5$ h. attribuée par Æser et Tuck (26) à ${}^{63}\text{ou } {}^{65}_{28}\text{Ni}^*$.

L'existence de 5 isotopes de Zn rend très imprécises ces attributions.

Action des rayons γ . — Bothe et Gentner (46-53) signalent l'apparition d'un radioélément de période $38 \pm 1,3$ min. :

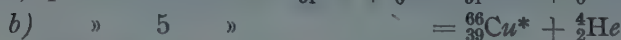
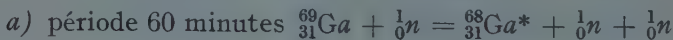


31°) GALLIUM.

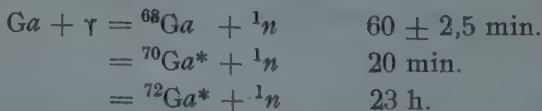
Action des neutrons. — Réactions connues



Chang et coll. (23) signalent 2 radioéléments d'intensités comparables obtenus avec les neutrons de Li et de B :



Action des rayons γ . — Bothe et Gentner (46-53) signalent la production de 3 radioéléments au moyen des rayons γ de 17 Mev du Li .



La dernière de ces réactions se comprend difficilement, Ga n'ayant que les isotopes 69 et 71.

32°) GERMANIUM.

Les neutrons produisent 2 radioéléments non identifiés de périodes 30 min. et 2 h.

33°) ARSENIC.

Action des deutons. — Réaction connue



Thornton (72) signale 2 radioéléments, l'un de période 27 h. (réaction précédente), source de rayons γ et d' ϵ^- d'énergie maxima 1,5 Mev; l'autre de période 2,5 h. pourrait être dû à une contamination par Si.

Action des neutrons. — Réaction connue ${}^{75}_{33}\text{As} + {}^1_0n = {}^{76}_{33}\text{As}^*$

Hartek (58) a observé en chambre de Wilson avec les neutrons lents la production d' ϵ^- de limite d'énergie 3,4 Mev et d' ϵ^+ de limite d'énergie 0,9 Mev. La complexité du rayonnement le fait attribuer à 2 radioéléments dont l'un serait ${}^{76}_{33}\text{As}^*$ source d' ϵ^+ . Brown et Mitchell (105) donnent les limites d'énergie 3,4 Mev et 1,09 Mev. Fay et Paneth (162) ont signalé une technique de concentration du radioélément formé.

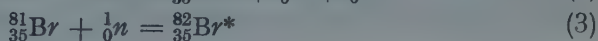
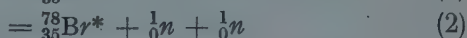
34°) SÉLÉNIUM.

Réaction connue ${}^{74}_{34}\text{Se} + {}^1_0n = {}^{75}_{34}\text{Se}^*$

Heyn (21) signale l'apparition de ce radiosélénium de période 22 min., avec les neutrons lents et d'un autre radiosélénium de période 56 min. résultant de ${}^{74}_{34}\text{Se} + {}^1_0n = {}^{75}_{34}\text{Se}^* + {}^1_0n + {}^1_0n$

35°) BROME.

Action des neutrons. — Réactions connues



Les réactions (1) et (3) correspondraient aux radioéléments trouvés par Fermi et de périodes 18 min. et 4,2 h. D'après Johnson et Hamblin (12), le radiobrome ${}^{80}_{35}\text{Br}^*$ pourrait aussi provenir de ${}^{81}_{35}\text{Br} + {}^1_0n = {}^{80}_{35}\text{Br}^* + {}^1_0n + {}^1_0n$ avec les neutrons rapides. Ils signalent en outre un radioélément de période 24 h. qui pourrait être ${}^{78}_{35}\text{Br}^*$ ou un autre isotope du brome.

La réaction (2) a été confirmée par Chang et coll. (23) et par Heyn (21) qui trouve 2 périodes, 18 min. et 5 min.

Alichanian et coll. (140) ont déterminé les limites supérieures d'énergie : $2 \pm 0,1$ Mev pour 18 min. ; 2,05 Mev pour 4,2 h. ; 0,85 Mev pour 36 h.

Rusinov (139) a étudié le ralentissement des neutrons par le brome.

Fay et Paneth (162) ont donné une technique de concentration des radioéléments formés; Erbacher et Philip (169-180), une technique de séparation.

Action des rayons γ . — Bothe et Gentner (46-51-52) ont obtenu avec les rayons γ de 17 Mev du Li, 4 radioéléments

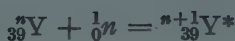
$${}^{78}\text{Br}^* : 5 \pm 0,5 \text{ min.}; {}^{80}\text{Br}^* : 16 \pm 0,9 \text{ min.}; {}^{80}\text{Br}^* : 4,5 \pm 0,1 \text{ h.}; \\ {}^{82}\text{Br}^* : 36 \text{ h.}$$

On se trouverait donc en présence de 2 noyaux radioactifs isomères.

37°) RUBIDIUM.

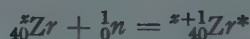
Les neutrons produisent une activité faible de courte période.

39°) YTTRIUM.



Hevesy et Levi (184) ont déterminé la période 70 h. de ${}^{90}\text{Y}^*$.

40°) ZIRCONIUM.



42°) MOLYBDÈNE.

Action des neutrons. — Les neutrons lents produisent 2 radioéléments de périodes 25 min. et 36 h. le second pouvant être le radiozirconium.

Heyn (21) trouve aussi 25 min. avec les neutrons lents mais 21 min. avec les neutrons rapides. On aurait $\text{Mb} + {}^1_0\text{n} = \text{Mb} + {}^1_0\text{n} + {}^1_0\text{n}$.

Action des rayons γ . — Bothe et Gentner (46-53) trouvent outre les périodes connues un nouveau radioélément de période 17 ± 1 min.

44°) RUTHÉNIUM.

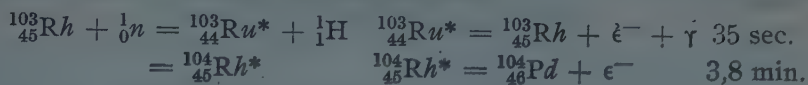
Action des deutons. — Livingood (97-102) avec des deutons de 5 Mev trouve 4 radioéléments de périodes 46 ± 3 j., 11 ± 2 j., 39 ± 1 h., 4 ± 1 h.

Action des neutrons. — On avait trouvé sous l'action des neutrons lents 4 radioéléments de périodes 40 sec., 100 sec., 11 h., 75 h.

45°) RHODIUM.

Sous l'action des neutrons, on avait trouvé un radiorhodium de période 35-44 sec, dû à ${}^{45}\text{Rh} + {}^1_0\text{n} = {}^{46}\text{Rh}^*$ et un second radioélément de période 3,9 min. non identifié.

Müller (55) a déterminé exactement ces périodes et trouvé 35 ± 1 sec $3,8 \pm 0,1$ min. Il les attribue aux réactions



Il trouve en plus une composante faible de période 1 h. environ.

Gærtner et coll. (81) ont trouvé 2,8 Mev pour la limite d'énergie des rayons β du radioélément de période 44 sec.; Alichanian et coll. (140) donnent $2,5 \pm 0,1$ Mev pour la même limite.

Rusinov (139) a étudié le ralentissement des neutrons par le rhodium.

Döpel (147) a proposé d'employer le rhodium comme test pour la mesure des neutrons et précisé les conditions de cette mesure.

46°) PALLADIUM.

Action des deutons. — Kraus et Cork (124) ont étudié l'action de deutons de 6,5 Mev.

Des séparations chimiques montrent de fortes activités et au moins 2 isotopes de l'argent de périodes 32 min. et $7\frac{1}{2}$ jours.

Action des neutrons. — On connaissait la production d'un radio-palladium de période 12-14 h. et d'un autre élément de période 15 min. non-identifié.

47°) ARGENT.

Action des neutrons. — Réaction connue

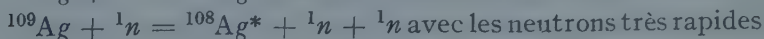
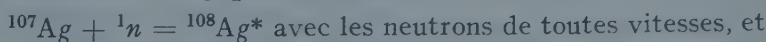


On trouve de nombreuses périodes :

a) (22 ± 1) sec. Müller (55); (30 ± 4) sec. Guében (15-183).

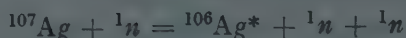
b) (47 ± 3) sec. Guében (15-183) trouve ce radioélément avec les neutrons rapides et l'attribue à ${}^{107}_{47}\text{Ag} + {}^1_0n = {}^{104}_{45}\text{Rh}^* + {}^4_2\text{He}$. Rotblat (25) n'a pas retrouvé cette période.

c) $(2,4 \pm 0,1)$ min. Müller (55); Guében (15-183); Heyn (21); Riddemann et coll. (57); Pool et coll. (132). Ces derniers attribuent cette activité à ${}^{108}\text{Ag}$ qui serait dû à



d) (25 ± 3) min. Chang et coll. (23); Riddemann et coll. (57);

Heyn (21); Rotblat (25). Cette activité serait due à $^{106}\text{Ag}^*$ qui proviendrait de



sous l'action des neutrons rapides.

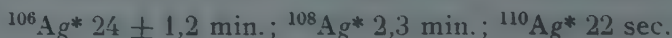
Rotblat (25) pense que dans ce processus, après le choc, le neutron incident et le neutron émis doivent avoir tous deux une énergie cinétique très faible et qu'ils doivent être beaucoup plus actifs que les neutrons rapides pour produire l'activation par capture. On rendrait ainsi compte de l'accroissement d'activation dû à l'interposition d'épaisseurs relativement faibles de substances absorbantes.

e) 70 minutes. Müller (55).

Gærttner et col. (81) ont trouvé 2,8 Mev pour la limite d'énergie des ϵ^- de l'élément de période 22 sec.; Alichanow et coll. (140) ont trouvé $2,7 \pm 0,1$ Mev pour la même limite. Naidu (156) a trouvé 3,8 Mev pour la limite d'énergie des ϵ^- de l'élément de période 2,4 min.

Rusinov (139) a étudié le ralentissement des neutrons par Ag.

Action des rayons γ . — Bothe et Gentner (46-52) ont trouvé sous l'action des rayons γ de 17 Mev du Li 3 radioéléments qui seraient



48°) CADMIUM.

Réaction connue $^{48}\text{Cd} + {}^1_0\text{n} = ^{48}\text{Cd}^*$

Heyn (21) en plus de la période connue de 200 min. trouve une 2^e période de 20 min. qu'il attribue à la réaction



Avec des neutrons lents, après une irradiation d'une semaine, Mitchell (135) a observé une activité faible à 2 périodes, 52 ± 5 h., et 5 h. la courte période ayant une activité égale au 1/5 de la longue; $^{114}\text{Cd}^*$ et $^{116}\text{Cd}^*$ seraient les deux radioéléments.

49°) INDIUM.

Les neutrons produisent $^{114}_{49}\text{In}^*$ de période 13 sec.; $^{116}_{49}\text{In}^*$ de période 54 à 60 min. et un élément non-identifié de période 3 à 3,5 h.

Gærttner et coll. (81) ont déterminé les limites supérieures des spectres β des radioéléments de périodes 54 min et 13 sec.: ce sont respectivement 1,3 Mev et 3,2 Mev. Brown et Mitchell (105) donnent une seule limite de 1,45 Mev. Chang et coll. (23) avec les neutrons

rapides ont trouvé un radioélément de période 1 min. environ dû à la réaction



Action des rayons γ . — Bothe et Gentner (46-53) avec les rayons γ de 17 Mev du Li ont trouvé un radioélément de période $1,1 \pm 0,2$ min. qu'ils pensent être ${}^{114}_{49}\text{In}$

50°) ÉTAIN.

Action des deutons. — Livingod et Seaborg (43-103) ont étudié l'action de deutons de 5 Mev.

Des séparations chimiques sur le produit irradié ont permis de séparer :

a) avec l'indium une forte émission β de période 26 ± 2 h. et une activité faible d'une période de plusieurs mois.

b) avec l'étain une forte émission β de période 28 ± 2 h. et une activité faible de période de plusieurs mois.

c) avec l'antimoine un élément de période $13,3 \pm 1$ h. source d' ϵ^+ et d' ϵ^- , présentant donc une double désintégration et un élément de période 112 ± 30 j.

d) un élément de période 12 ± 2 min. dû probablement à ${}^{13}_{7}\text{N}^*$ produit sur C qui accompagne Sn comme impureté.

e) un élément de période 45 ± 5 min probablement identique à ${}^{114}_{48}\text{In}$ ou ${}^{116}_{48}\text{In}^*$ (période 54 min.).

Action des neutrons. — Nahmias (59-153) trouve un radioélément de période 6 min environ, qui résulterait de ${}^{122}_{50}\text{Sn} + {}^1_0\text{n} = {}^{123}_{50}\text{Sn}^*$. Naidu (4), avec les neutrons lents, trouve 2 périodes, l'une de 8 minutes qui correspond vraisemblablement à la précédente, l'autre de 18 minutes, celle-ci étant deux fois plus intense que la première.

51°) ANTIMOINE.

Action des deutons. — Livingood (93-102) avec des deutons de 5 Mev trouve 3 périodes 50 ± 4 j.; 68 ± 2 h.; 24 ± 2 h. La seconde correspondrait à la période de 2,5 j. obtenue avec les neutrons. Les deux premières seraient dues à ${}^{121}_{51}\text{Sb} + {}^2_1\text{H} = {}^{122}_{51}\text{Sb}^* + {}^1_1\text{H}$; la troisième, à ${}^{123}_{51}\text{Sb} + {}^2_1\text{H} = {}^{121}_{50}\text{Sn}^* + {}^4_2\text{He}$. La limite d'énergie de ϵ^- émis serait 0,25 Mev.

Action des neutrons. — Réaction connue ${}^{51}_{51}\text{Sb} + {}^1_0\text{n} = {}^{51}_{51}\text{Sb}^*$ (période 2,5 j.).

Heyn (21), Chang et coll. (23) trouvent, en plus, avec les neutrons rapides, un élément de période (17 ± 1 min.) qui résulterait de



Action des rayons γ . — Bothe et Gentner (46-52) ont trouvé un élément de période ($15 \pm 0,8$) min. qui correspond au radioélément de période 17 min trouvé avec les neutrons.

52°) TELLURE.

Action des neutrons. — On connaissait un radioélément non-identifié de période 45 min.

Heyn (21) trouve un radioélément de période 60 min qui résulterait de l'expulsion d'un neutron.

Action des rayons γ . — Bothe et Gentner (46-53) ont trouvé un élément de période $60 \pm 3,5$ min qui ne peut être qu'un isotope du Te.

53°) IODE.

On connaissait la réaction $^{127}_{53}\text{I} + {}^1_0\text{n} = ^{128}_{53}\text{I}^*$.

Alichanian et coll. (140) ont évalué à 2,1 Mev la limite du spectre β du radioiode. Rusinov (139) a étudié le ralentissement des neutrons. Fay et Paneth (162), Erbacher et Philipp (169-180) ont indiqué des techniques de séparation des radioéléments formés.

55°) CAESIUM (1).

On connaissait la formation d'un $^{55}\text{Cs}^*$ de période 75 à 90 min.

Döpel (38) avait cru pouvoir conclure à la production d'un radioélément source de particules α : période 1 à 2 min.; particules α de parcours 1 à 2 cm. Fünfer (150) n'a pu confirmer ce résultat.

56°) BARYUM.

Les neutrons produisent 2 radioéléments de périodes 3 min. et 90 min.

57°) LANTHANE.

Hevesy et Levi (1-184) ont confirmé la période 1,9 jours de $^{140}_{57}\text{La}^*$. Cette radioactivation donne lieu à un effet d'hydrogène notable.

(1) A partir de l'élément 55, en l'absence d'autre indication, il s'agit de l'action des neutrons.

58°) CÉRIUM.

Hevesy et Levi (1-184) n'ont trouvé aucune activation. Döpel (38) avait cru pouvoir conclure à la production d'un radioélément de période 1 à 2 min source de particules α de parcours 1 à 2 cm. Fünfer (150) n'a pas retrouvé cette activité.

59°) PRASÉODYME.

Bien qu'un seul isotope de cet élément soit connu ^{141}Pr , on trouve 2 activités de périodes 5 min. et 19 h. Hevesy et Levi (1-184) examinent quelques possibilités d'interprétation.

60°) NÉODYME.

Formation de $^{147}_{60}\text{Nd}^*$ de période 1 h. ou 35 min. (Hevesy et Levi 1-184).

62°) SAMARIUM.

Formation de 2 radioéléments de périodes 40 min. et 2 j. (Hevesy et Levi 1-184).

63°) EUROPIUM.

Formation de $^{154}\text{Eu}^*$ de période 9,2 h., source de rayons β et γ , donnant lieu à l'effet d'hydrogène (Hevesy et Levi 1-184). Naidu (156) a confirmé la période et déterminé à 1,9 Mev la limite du spectre β .

64°) GADOLINIUM.

Formation d'un radioélément de période 8 h. ou 6,4 h. (Hevesy et Levi 1-184).

65°) TERBIUM.

Formation de $^{160}\text{Tb}^*$ de période 3,9 h. (Hevesy et Levi 1-184).

66°) DYSPROSIUM.

Formation d'un radioélément de période 2,5 h. (Hevesy et Levi 1-184). C'est l'élément qui donne lieu à la plus forte activation par les neutrons; il présente aussi un fort effet d'hydrogène. La limite du spectre β a été déterminée par Naidu (156) qui donne 1,9 Mev et par Gærttner et coll. (81) qui fournissent 1,4 Mev.

67°) HOLMIUM.

Formation d'un radioélément $^{166}\text{Ho}^*$ de période 35 h. (Hevesy et Levi 1-184).

68°) ERBIUM.

Formation de deux radioéléments $^{169}, ^{171}\text{Er}^*$ de périodes 7 min et 12 h. (Hevesy et Levi 1-184).

69°) THULIUM.

Formation d'un radioélément de période 3,5 mois (Hevesy et Levi 1-184) ou $4 \pm 1/2$ mois (Neuninger et Rona 157), ou 8 mois (M. Curie et Preiswerk 63). D'après ces deux derniers auteurs, on aurait $^{169}\text{Tm} + {}^1_0\text{n} = {}^{170}\text{Tm}^*$ $^{170}\text{Tm}^* = {}^{170}\text{Yb} + e^-$ On arriverait ainsi à ^{170}Yb isotope encore inconnu, peut-être instable.

70°) YTTERBIUM.

Formation de 175 ou $^{177}\text{Yb}^*$ de période 3,5 h. (Hevesy et Levi 1-184).

71°) LUTÉCIUM ou CASSIOPEUM.

Formation de deux radioéléments de périodes 6 jours et 4 h. Hevesy et Levi (1-184) ont vérifié que la 2^e période n'était pas due à la contamination par Yb.

72°) HAFNIUM.

On connaissait 2 radioéléments de périodes 2 à 4 mois et 2 h.

73°) TANTALE.

Action des neutrons. — Fomin et Houtermans (138) trouvent une activité faible de période environ 200 jours. Le rayonnement β émis est mou. Son spectre laisse supposer qu'on se trouve en présence de deux radioéléments chacun de période supérieure à 80 jours. Heyn (21) à la suite d'irradiations de $1\frac{1}{2}$ heure trouve une activité très faible dont la période n'a pu être déterminée, mais qui pourrait être due à une activation avec émission du neutron.

Action des rayons γ . — Bothe et Gentner (53) trouvent une activation ($^{180}\text{Ta}^*$) de période 14 minutes.

74°) TUNGSTÈNE.

On connaissait sous l'action des neutrons la formation de 184 ou $^{186}_{74}\text{W}$ de période 24 h. Jackel (44a) a trouvé 24,5 h. pour cette période.

75°) RHENIUM.

On connaît, sous l'action des neutrons, la formation de deux radio-éléments de périodes 20 h. et 85 h.

76°) OSMIUM.

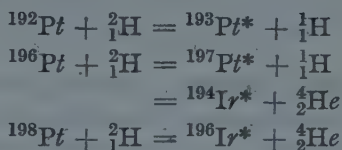
On connaît un radioélément de période 23 h. ou 40 h. dû à l'action des neutrons.

77°) IRIDIUM.

Les neutrons produisent 3 radioéléments de périodes 19 h., 50 min, 3 jours. Alichanian et coll. (140) ont retrouvé la période de 19 heures à laquelle correspond un rayonnement β dont la limite supérieure est $2,2 \pm 0,2$ Mev.

78°) PLATINE.

Action des deutons. — Réactions connues



Cork et Lawrence (69-80) ont confirmé ces réactions pour lesquelles ils ont déterminé les périodes; ce sont respectivement 49 min. (ϵ^+); 14,54 h. (ϵ^-); 28 min. et 8,5 h.

Action des neutrons. — Réaction connue ${}^{192}\text{Pt} + {}^1_0\text{n} = {}^{193}\text{Pt}^*$.

79°) OR.

Les neutrons produisent un radioélément de période 2,5 j.

Alichanian et coll. (140) ont trouvé une période de 2,7 jours et une limite d'énergie du rayonnement β de $1,15 \pm 0,2$ Mev. Rusinov (139) a étudié le ralentissement des neutrons par l'or. Majer (56) a décrit une technique permettant la concentration chimique du radio-élément.

80°) MERCURE.

Action des neutrons. — Andersen (3) a trouvé pour la première fois une activation du mercure de période (40 ± 5) h. Elle serait due à la formation de ${}^{205}_{80}\text{Hg}^*$. Heyn (21) a trouvé en plus un radioélément de période (43 ± 1) min qui accompagnerait l'expulsion d'un neutron.

81°) THALLIUM.

On connaissait sous l'action des neutrons 2 radioéléments $^{206,208}_{81}\text{Tl}^*$ de périodes 4 min. et 97 min. Heyn (21) attribue une période de 4,1 min à une radioactivation avec expulsion d'un neutron.

82°) PLOMB.

Gibson et coll. (112) ont observé la production de rayons γ par Pb irradié par des neutrons. Thornton et Cork (122) ont remarqué que la présence de l'isotope 209 du Pb devait permettre la production d'un $^{210}\text{Pb}^*$ dans l'activation par les neutrons ou par les deutons. Ce $^{210}\text{Pb}^*$ serait identique au RaD. Pratiquement ils n'ont pas observé ce RaD, mais un radioélément de période 3 h. Ils ont observé en outre d'autres courtes périodes non chimiquement identifiées.

83°) BISMUTH.

Action des deutons. — Livingood (84-102) sous l'action de deutons de 5 Mev trouve un radioélément de période 5 jours qui serait dû à

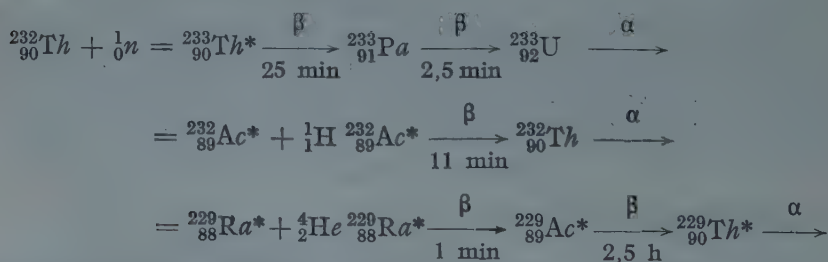


Ce $^{210}\text{Bi}^*$ serait donc identique au RaE. Ce qui le confirme c'est qu'on observe une émission de rayons α qui croît pendant 3 semaines puis reste constante pour décroître ensuite lentement. Le parcours des particules α coïncide avec celui des particules α du polonium

Action des neutrons. — Réaction connue $^{209}\text{Bi} + ^1_0\text{n} = ^{210}\text{Bi}^*$.

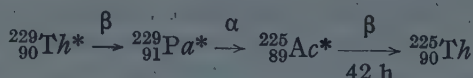
90°) THORIUM.

L'irradiation par les neutrons conduisait à 5 radioéléments qui avaient été classés comme suit :



Rona et Neuninger (49) ont trouvé en plus un radioélément de période 42 h. isotope de l'actinium. Ils supposent qu'il résulte de la

filiation du $^{229}_{90}\text{Th}^*$ de la dernière réaction qui évoluerait comme suit :

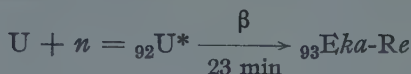


les radiateurs intermédiaires n'ont pas été décelés.

92°) URANIUM.

En plus des données ayant fait l'objet d'une publication antérieure dans cette revue (187-48-179), nous devons signaler les résultats suivants :

Meitner, Hahn et Strassmann (47) fournissent 66 h. au lieu de 3 jours pour la période de $^{95}\text{Eka-Ir}^*$ et 5,7 h. au lieu de 6 h. pour la période de $^{94}\text{Eka-Os}^*$ (2 processus, réactions p. 268 de 187). Quant au 3^e processus (équation p. 267 de 187) on n'a pu trouver aucune trace du rayonnement α supposé, de sorte que les auteurs proposent la nouvelle filiation



Les deux premiers processus sont produits par les neutrons rapides et par les neutrons thermiques dans un même rapport, et il n'y a pas de région de résonance dans le domaine compris entre les deux types de rayons. Le 3^e processus, par contre, n'est déterminé que par les neutrons lents et présente une résonance à 25 ± 10 volts.

Les 3 processus paraissent provenir de l'isotope $^{238}\text{U}^*$ de sorte qu'il y aurait production de 3 isomères.

Une irradiation prolongée montre après séparation de l'uranium un rayonnement α très faible, mais nettement observable, dont l'intensité suivie pendant plusieurs mois s'est montrée constante.

Meitner (166) a déterminé les énergies β et γ de quelques transuranes. On aurait :

$^{16}_{93}\text{Eka-Re}^*$	limite supérieure β	3,2 Mev
$^{59}_{94}\text{Eka-Os}^*$	» » »	0,6 Mev

$^{66}_{95}\text{Eka-Ir}^*$ et plus probablement $^{2,5}_{96}\text{Eka-Pt}^*$ limite supérieure β 0,7 Mev
 $^{59}_{94}\text{Eka-Os}^*$ et $^{16}_{95}\text{Eka-Re}^*$ montrent un rayonnement γ , le premier beaucoup plus intense que le second, ce qui est bien en rapport avec le rayonnement β moins énergétique pour le premier que pour le second.

Hahn, Meitner et Strassmann (182) ont exposé les propriétés chimiques des éléments transuraniens et les méthodes de séparation.

Cet exposé se termine par le tableau des radioéléments connus jusqu'à présent. Ce tableau comprend successivement l'indication du radioélément, la nature du rayonnement émis, la période, la valeur de l'énergie du rayonnement β émis, l'origine du radioélément, les références bibliographiques. Dans la première colonne, pour être conforme au texte précédent, chaque notation devrait être affectée d'un *; ce signe a été supprimé pour la facilité de l'impression. Dans la 6^e colonne les abréviations suivantes ont été employées : α , particules α — P, protons accélérés — D, deutons accélérés — n, neutrons — γ , rayons γ de grande énergie.

31 août 1937.

GEORGES GUÉBEN

Chargé de cours à l'Université de Liège.

Radioéléments	Rayonnement émis	Période	Energie β en Mev		Produit		Références
			Moyenne	Limite supér.	par	sur	
${}^6_2\text{He}$ ou ${}^5_2\text{He}$	ϵ^-	$0,8 \pm 0,04 \text{ sec.}$		6 à 8	<i>n</i>	Be	6, 10, 11, 64, 153
${}^8_3\text{Li}$	ϵ^-	0,5 à 0,7 sec.	3	10,5	D	Li	186, 188, 106, 78, 16, 130, 149, 62, 64, 152, 153, 173, 176
					<i>n</i>	Li, B	62, 64, 153, 173, 176, 152.
${}^{10}_4\text{Be}$	ϵ^-	> 10 ans			α	Li	149, 152, 188.
					D	Be	82.
${}^9_5\text{B}$	ϵ^+	< 1 min. 1 sec.		$\sim 0,3$	D	Li	188.
		qq. min.			α	Li	64.
${}^{12}_5\text{B}$	ϵ^-	0,02 sec.	4,5	11	D	B	149.
							188, 186, 78, 149, 152.
${}^{11}_6\text{C}$	ϵ^+	$21 \pm 0,6 \text{ min.}$	0,6	1,3	D	B	188, 76, 149, 152.
					P	B, N	
${}^{14}_6\text{C}$	ϵ^-	$\sim 3 \text{ mois}$			<i>n</i>	N	188, 149.
					D	C	82.
${}^{13}_7\text{N}$	ϵ^+, γ	10 min.	$\sim 0,4$	1,45	D	C	188, 186, 68, 76,
				1,16	P	C	91, 149, 152.
				1,5	α	B	149
					<i>n</i>	N	132.
${}^{15}_7\text{N}$?		10^{-20} sec.			<i>n</i>	N	186, 109.
${}^{16}_7\text{N}$	ϵ^-, γ	40 sec.	$\sim 2,5$	~ 6	<i>n</i>	F, O	188, 186, 149.
					D	N	
		8-12 sec.			<i>n</i>	F, O	23, 61, 152.
${}^{15}_8\text{O}$	ϵ^+	$116 \pm 5 \text{ sec.}$		1,3 à 1,7	D	N	188, 186
		2,1 min.			<i>n, \gamma</i>	O	23, 132.
${}^{19}_8\text{O}$		8-10 sec.			<i>n</i>	F, Ne	149.
		40 sec. ?					188.
		31 sec.			<i>n</i>	F	61, 153, 152.
${}^{17}_9\text{F}$	ϵ^+	$1,28 \pm 0,1 \text{ min.}$	$\sim 0,8$	2,25	D, P	O	188, 186, 75, 136,
				1,2	α	N	149, 45.
${}^{18}_9\text{F}$	ϵ^+	$107 \pm 4 \text{ min.}$			P	O	136.
					D	Ne	118.

Radioéléments	Rayonnement émis	Période	Energie β en Mev		Produit		Références
			Moyenne	Limite supér.	par	sur	
$^{20}_{9}\text{F}$	ϵ^-	9 sec.	1,8	5	D	F	188, 186, 149, 78,
					n	F, Na	61, 153, 152.
$^{23}_{10}\text{Ne}$	ϵ^-	40 sec.	0,5		n	Mg, Na	188, 186, 149, 61,
		33 ± 1 sec.			α	F	153, 19, 152.
$^{22}_{11}\text{Na}$	ϵ^+	9 min. ?	0,2	0,4	α	F	188, 149.
		~ 6 mois					186.
		~ 9 mois		0,4	D	Mg	95, 96.
$^{24}_{11}\text{Na}$	ϵ^-, γ	$14,8 \pm 0,5$ h.	0,5	1,85 - 2	D	Na, Mg	188, 186, 149, 66
							68, 95, 96, 37
					n	Na, Mg, Al	163, 148, 37, 152.
$^{23}_{12}\text{Mg}$	ϵ^+	15,8 h.			D	Al	123.
$^{27}_{12}\text{Mg}$	ϵ^-, γ	10 min.	0,6		n	Mg, Al	188, 186, 149, 37,
					D	Mg	95, 96, 163.
$^{26}_{13}\text{Al}$	ϵ^+, γ ?	7 sec.		1,8	α	Na	188, 149.
$^{28}_{13}\text{Al}$	ϵ^-, γ	137 sec.	1,2	3 - 3,3	α	Mg	188, 186, 149, 30
		156 ± 5 sec.			D	Al	35, 37, 73, 123
					n	Al, Si, P	152.
		6,6 min.		2,75	α	Mg	45, 167.
$^{29}_{13}\text{Al}$	ϵ^+, γ	11 min.			α	Mg	188, 149, 152, 30.
$^{27}_{14}\text{Si}$	ϵ^+, γ	6 à 7 min.			α	Mg	188, 186, 149, 30,
							152, 167.
		2,3 min.		1,8			45.
$^{31}_{14}\text{Si}$	ϵ^-	2,4 à 3 h.	1,2	1,85	D	Si	188, 186, 149, 68,
					n	Si, P, S	75, 113, 123.
$^{30}_{15}\text{P}$	ϵ^+, γ	2,9 - 3,2 min.	0,3	$2,9 \pm 0,1$	α	Al	188, 186, 149, 34,
							35.
					D	Si, S	113.
					γ	P	46, 51, 152.
$^{32}_{15}\text{P}$	ϵ^+, γ	15 ± 1 j.	$\sim 0,85$	2,15	α	Si	186
				1,68 à 1,95	D	P, S	75, 113, 114.
					n	P, Cl, S	188, 186, 149, 2,
							37, 68, 94, 113,
							119, 140, 152, 174
X	ϵ^+	50 h.		0,9	D	P	71
$^{35}_{16}\text{S}$		80 ± 10 j.			n	Cl	188, 3, 168, 152.

Radioéléments	Rayonnement émis	Période	Energie β en Mev		Produit		Références
			Moyenne	Limite supér.	par	sur	
³⁴ ₁₇ Cl	ε ⁺	40 min.		1,8	α	P	188, 149.
		33 ± 0,1 min.			D	S	113.
³⁸ ₁₇ Cl	ε ⁻ , γ	35 min.		2,5 4,8	n, D	Cl	188, 186, 149. 66.
⁴¹ ₁₈ A	ε ⁻ , γ	110 min.	0,4	2,7 - 3,1	D, n	A	188, 152, 66, 68, 77.
³⁸ ₁₈ K	ε ⁺	10,5 h.			D	Ca	127.
⁴² ₁₉ K	ε ⁻	16 h.	0 87	3,7	D	K, Ca	188, 186, 149, 127,
		12,2 ± 0,2 h.			n	K, Ca, S	37, 66, 184.
⁴⁵ ₂₀ Ca		4 h.			n	Ca, Ti	188, 149, 127.
		2,4 h.			D	Ca	
⁴¹ ₂₁ Sc		52 h.			D	Ca	127
⁴³ ₂₁ Sc	ε ⁺	4 h.			n	Ca	188.
					α	Ca, K	186, 149, 127.
⁴⁴ ₂₁ Sc		53 min.			D	Ca	127.
⁴⁶ ₂₁ Sc		2 mois			n	Sc	184.
⁴⁵ ₂₂ Ti	ε ⁺	4,4 h.			α	Ca	188.
⁵¹ ₂₂ Ti	ε ⁻	3 min.			n	Ti	188, 186, 149, 127
⁵² ₂₃ V	ε ⁻ , γ	3,7 min.	1,4		n	V, Cr, Mn	188, 186, 149, 37.
⁵⁶ ₂₅ Mn	ε ⁻ , γ	2,5 h.	~0,75 1,1	2,8 3,2	n	Mn, Fe, Co	188, 186, 149, 81, 140, 105, 37.
⁵⁹ ₂₆ Fe ?	ε ⁺	72 h. (?)			n	Co	8, 152.
		130 ± 10 j.			D	Cu	97, 102, 152.
⁵⁸ ₂₇ Co	ε ⁻	11 - 20 min.			n	Co	92, 175, 37.
⁶⁰ ₂₇ Co	ε ⁻	11 - 20 min.			n	Co, Ni	188, 152.
		1 an			n	Co	92, 152.
²⁸ Ni	ε ⁻	3,5 ± 0,1 h.			n	Ni, Cu	188, 4, 26, 37,
		180 min.			D	Co, Ni	72, 152, 175.
		160 ± 10 min.					
⁶³ ₂₈ Ni ?		130 ± 10 j.			D	Ni, Cu	97, 102.
		13 ± 0,5 h.			n	Zn	26.
²⁹ Cu	ε ⁺	3,4 ± 0,1 h.			D	Ni	72, 133
⁶² ₂₉ Cu	ε ⁻	10,5 ± 0,5 min.			n, γ	Cu	14, 23, 25, 46, 51, 152, 175.

Radioéléments	Rayonnement émis	Période	Energie β en Mev		Produit		Références
			Moyenne	Limite supér.	par	sur	
$^{64}_{29}\text{Cu}$	$\epsilon^+, \epsilon^-, \gamma$	12,8 \pm 0,1 h.		$\epsilon^+ 0,79$ $\epsilon^- 0,83$	D n	Cu, Zn Cu, Zn	188, 186, 149, 152 26, 85, 102, 111, 132.
$^{66}_{29}\text{Cu}$	ϵ^-, γ	5 - 6 min.			D	Cu	188, 186, 149, 152, 14, 25, 55, 97, 102, 175.
		6 h.			n	Cu, Zn, Ga	23, 26, 132, 152
^{29}Cu		17 h.			n	Zn	14, 37, 175.
$^{65}_{35}\text{Zn}$		60 min.			n	Zn	13.
		38 \pm 1,3 min.			D, n	n	188, 152, 14, 25, 102, 175.
^{30}Zn		15 h.			γ	Zn	46, 53, 152.
^{30}Zn		100 h.			D, n	Zn	188.
^{30}Zn		100 min.			D	Zn	188, 102, 152.
^{30}Zn		6 min.			n	Zn	188, 186, 13.
$^{68}_{31}\text{Ga}$		60 \pm 2,5 min.			n	Zn	14, 175.
		20 min.			D	Zn	102, 152.
$^{70}_{31}\text{Ga}$					n, γ	Ga	23, 46, 53, 152
$^{72}_{31}\text{Ga}$	ϵ^-, γ	23 h.			n, γ	Ga	188, 186, 149, 46, 53.
$^{69}_{32}\text{Ge}$		2 h.			D	Zn	188, 186, 149,
X		30 min. ?			n, γ	Ga	152, 46, 53, 102
$^{76}_{33}\text{As}$	ϵ^-, γ	27 \pm 1 h.	1,3	1,5 - 3,4	α	Zn	188, 146.
^{34}Se		35 min.			n	Gf	188, 186, 149.
		22 min.			n	Se	21.
		56 min.			n	Se	21.
$^{78}_{35}\text{Br}$		5 \pm 0,5 min.			n	Se	21.
	ϵ^-, γ	36 h.		0,9	n, γ	Br	21, 23, 46, 51, 52.
$^{80}_{35}\text{Br}$	ϵ^-	16 \pm 0,9 min.	0,2	2 \pm 0,1	n	Br	188, 152, 12, 140.
					n, γ	Br	188, 186, 149, 152, 12, 21, 46, 51, 52, 140.

Radioéléments	Rayonnement émis	Période	Energie β en Mev		Produit		Références
			Moyenne	Limite supér.	par	sur	
⁸⁰ ₃₅ Br	ϵ^-	$4,5 \pm 0,1$ h.	$\leq 0,3$	2,05	n, γ	Br	188, 186, 152, 46 51, 52, 140.
⁸² ₃₅ Br	ϵ^-	24 - 36 h.			n, γ	Br	149, 12, 46, 51, 52
⁸⁸ ₃₇ Rb		courte					149.
⁹⁰ ₃₉ Y		70 h.			n	Y	188, 149, 184.
⁹⁷ ₄₀ Zr		40 h.			n	Zr, Mo(?)	188, 149.
⁴² Mo		17 ± 1 min.			γ	Mo	46, 53, 152.
⁴² Mo		21 min.			n	Mo	21.
⁴² Mo		25 min.			n	Mo	188, 186, 149, 21.
⁴² Mo (?)		36 h.			n	Mo	188, 186, 149.
¹⁰³ ₄₄ Ru	ϵ^-	35 ± 1 sec.			n	Ru, Rh	188, 152, 55.
		40 sec.					
⁴⁴ Ru ?		100 sec.			n	Ru	188.
		11 h.					
		75 h.					
X		4 ± 1 h.			D	Ru	97, 102, 152.
		39 ± 1 h.					
		11 ± 2 j.					
		46 ± 3 j.					
¹⁰⁴ ₄₅ Rh	ϵ^-	3,8 min.		$\sim 2,1$	n	Rh	188, 186, 149, 152.
⁴⁶ Rh ?	ϵ^-, γ	35 - 44 sec.	$\sim 0,9$	2,8	n	Rh; Ag	188, 186, 149, 152, 15, 55, 81, 140, 183.
X		~ 1 h.			n	Rh	55.
⁴⁶ Pd		~ 12 à 14 h.			n	Pd	188, 186, 149.
X		~ 15 min.			n	Pd	188, 149
		3 min.			n	Pd	152.
		60 h.					
¹¹⁰ ₄₇ Ag	ϵ^-, γ	22 ± 1 sec.	$\sim 0,8$	2,8	n, γ	Ag	188, 186, 149, 152, 15, 46, 55, 81, 140, 183.
¹⁰⁸ ₄₇ Ag	ϵ^-, γ	$2,4 \pm 0,1$ min.		3,8	n, γ	Ag	188, 186, 149, 152, 15, 21, 46, 52, 55, 57, 156, 183, 132.

Radioéléments	Rayonnement émis	Période	Energie β en Mev		Produit		Références
			Moyenne	Limite supér.	par	sur	
$^{106}_{47}\text{Ag}$		25 \pm 3 min.			n, γ	Ag	21, 23, 25, 46, 52, 57, 152.
		32 min.			D	Pd	124, 152.
X		70 min.			n	Ag	55.
$^{47}\text{Ag} ?$		7½ jours			D	Pd	124, 152.
^{48}Cd		70 à 200 min.			n	Cd	188, 21.
^{48}Cd		20 min.			n	Cd	21.
$^{114}_{48}\text{Cd}$		52 \pm 5 h.			n	Cd	149, 135.
$^{116}_{48}\text{Cd}$		5 h.			n	Cd	135.
$^{112}_{49}\text{In}$		~ 1 min.			n, γ	In	23, 46, 53, 152.
$^{114}_{49}\text{In}$	ϵ^-	13 sec.	0,35	3,2	n	In	188, 186, 149, 81, 152.
$^{116}_{49}\text{In}$	ϵ^-, γ	54 - 60 min.	0,8	1,3	n	In	188, 186, 149, 81, 152.
		45 \pm 5 min.			D	Sn	93, 103, 152.
^{49}In		26 \pm 2 h.			D	Sn	93, 103, 152.
X		3 à 3,5 h.			n	In	188, 186, 149.
$^{123}_{50}\text{Sn}$		6 - 8 min.			n	Sn	188, 59, 153, 4, 152.
^{50}Sn		18 min.			n	Sn	188, 4, 152.
^{50}Sn		28 \pm 2 h.		0,25	D	Sn, Sb	93, 103, 102, 152.
$^{120}_{51}\text{Sb}$		15 à 17 min.			n, γ	Sb	21, 23, 46, 52, 152.
^{51}Sb	ϵ^+, ϵ^-	13,3 \pm 1 h.			D	Sn	93, 103, 152.
^{51}Sb	ϵ^-, γ	2,5 j.	0,7		n, D	Sb	188, 186, 149, 93, 102, 152.
^{51}Sb		112 \pm 30 j.			D	Sn	93, 103, 152.
^{52}Te		45 à 60 min.			n, γ	Te	188, 186, 149, 21, 46, 53.
$^{128}_{53}\text{I}$	ϵ^-	25 min.	0,9	2,1	n	I	188, 186, 149, 140, 152.
^{55}Cs		75 à 90 min.			n	Cs	188, 186, 149.
^{56}Ba		3 min.			n	Ba	188, 186, 149.
^{56}Ba		90 min.			n	Ba	188, 186, 149.
$^{140}_{57}\text{La}$		1,9 j.			n	La	188, 186, 149, 184.

Radioéléments	Rayonnement émis	Période	Energie β en Mev		Produit		Références
			Moyenne	Limite supér.	par	sur	
$^{142}_{59}\text{Pr}$		5 min.			n	Pr	188, 186, 149, 1, 184.
X		19 h.			n	Pr	188, 186, 1, 184.
$^{147}_{60}\text{Nd}$		1 h.			n	Nd	188, 186, 1, 184.
X		35 ± 5 min.			n	Sm	188, 186, 1, 184.
$^{152\text{ou}154}_{63}\text{Eu}$	ϵ^-, γ	40 min.		1,9	n	Eu	188, 186, 1, 184.
		2 j.					156, 152.
		9,2 h.					
X		6,4 - 8 h.			n	Gd	188, 186, 1, 184.
$^{160}_{65}\text{Tb}$		3,9 h.			n	Tb	188, 186, 1, 184, 149.
$^{165}_{66}\text{Dy}$	ϵ^-	2, 5 h.	$\sim 0,4$	1,4-1,9	n	Dy, Ho	188, 186, 149, 152, 1, 184, 81, 156.
$^{168}_{67}\text{Ho}$	ϵ^-	35 h.		1,6	n	Ho	188, 186, 149, 1, 184.
^{68}Er		7 min.			n	Er	188, 186, 1, 184.
^{69}Tm	ϵ^-	12 h.			n	Tm	1, 184, 157, 63, 152.
		$4 \pm \frac{1}{2}$ min.					
^{70}Yb		3,5 h.			n	Yb	188, 186, 149, 1, 184.
$^{176}_{71}\text{Lu}$		4 h.			n	Lu	id.
X		6 j.			n	Lu	id.
$^{181}_{72}\text{Hf}$		~ 2 h			n	Hf	188, 149.
X		2 à 4 mois			n	Hf	188.
X	ϵ^-	~ 200 j.			n	Ta	188, 138, 21, 152
$^{180}_{73}\text{Ta}$		14 min.			γ	Ta	53, 152.
^{74}W	ϵ^-, γ	24 h.			n	W	188, 186, 149, 44a, 152.
^{75}Re		20 h.	1		n	Re	188, 186, 149.
		85 h.					
^{76}Os		23 ou 40 h.			n	Os	149, 152.
^{77}Ir	ϵ^-	19 h.	1	2,2	n	Ir	188, 186, 149, 140
	ϵ^-, γ	50 min.	1,1				152.
	ϵ^-	3 j.	0,4				

Radioéléments	Rayonnement émis	Période	Energie β en Mev		Produit		Références
			Moyenne	Limite supér.	par	sur	
¹⁹⁴ ₇₇ I _r	ϵ^-	28 min.			D	Pt - Au	188, 69, 80, 152.
¹⁹⁶ ₇₇ I _r	ϵ^-	8,5 h.			D	Pt	id.
¹⁹³ ₇₈ Pt		49 min.			D, n	Pt	188, 186, 149, 69, 80, 152.
¹⁹⁷ ₇₈ Pt		14,5 h.			D	Pt	188, 69, 80, 152.
¹⁹⁸ ₇₉ Au	ϵ^-, γ	2, 5 j.	0,3	1,15	n, D	Au	188, 186, 149, 140, 152.
²⁰⁵ ₈₀ Hg		40 \pm 5 h.			n	Hg	188, 3, 152.
⁸⁰ Hg		43 \pm 1 min.			n	Hg	21.
²⁰⁶ ₈₁ Tl		4 min.			n	Tl	188, 149, 21.
²⁰⁴ ₈₁ Tl		97 min.			n	Tl	188, 186, 149.
⁸² Pb		3 h.			n	Pb	122, 152.
⁸³ Bi	ϵ^-	1 h.	1				149.
²¹⁰ ₈₃ Bi	ϵ^-, γ	5 j.			D, n	Bi	84, 102, 152.
²²⁹ ₈₈ Ra	ϵ^-	1 min.			n	Th	186, 149.
²³² ₈₉ Ac	ϵ^-	11 min.			n	Th	id.
²²⁹ ₈₉ Ac	ϵ^-	25 h.			n	Th	id.
²²⁵ ₈₉ Ac	ϵ^-	42 h.			n	Th	49, 152.
²³³ ₉₀ Th	ϵ^-	25 min.			n	Th	186, 149.
²³³ ₉₁ Pa	ϵ^-	2,5 min.			n	Th	id.
⁹² U	ϵ^-	10 sec.			n	U	186, 149, 187, 48, 179, 47, 166, 182, 152.
	ϵ^-	40 sec.			n	U	
	ϵ^-	23 min.			n	U	
⁹³ Eka-Re	ϵ^-	2,2 min.			n	U	
	ϵ^-, γ	16 min.	1,1	3,2	n	U	
⁹⁴ Eka-Os	ϵ^-, γ	59 min.		0,6	n	U	
	ϵ^-	5,7 h.			n	U	
⁹⁵ Eka-Ir	ϵ^-	66 h.			n	U	
⁹⁶ Eka-Pt	ϵ^-	2,5 h.		0,7	n	U	

BIBLIOGRAPHIE

1. HEVESTY et LEVI, *Nature* 137 (1936) 185
2. ALICHANOW, ALICHANIAN et DZELEPOW, *Nature* 137 (1936) 314
3. ANDERSEN, *Nature* 137 (1936) 457
4. NAIDU, *Nature* 137 (1936) 578
5. KIKUCHI, AOKI et HUSIMI, *Nature* 137 (1936) 745
6. BJERGE, *Nature* 137 (1936) 865
7. POLLARD et BRASEFIELD, *Nature* 137 (1936) 943
8. ANDERSEN, *Nature* 138 (1936) 76
9. ROTBLAT, *Nature* 138 (1936) 202
10. BJERGE et BROSTROM, *Nature* 138 (1936) 400
11. BJERGE, *Nature* 138 (1936) 400
12. JOHNSON et HAMBLIN, *Nature* 138 (1936) 504
13. MADSEN, *Nature* 138 (1936) 722
14. HEYN, *Nature* 138 (1936) 723
15. GUÉREN, *Nature* 138 (1936) 1095
16. LEWIS, BURCHAM et CHANG, *Nature* 139 (1937) 24
17. PANETH et GLÜCKAUF, *Nature* 139 (1937) 712
18. BERTL, FÜRTH, OBORUL et SITTE, *Nature* 139 (1937) 716
19. BJERGE, *Nature* 139 (1937) 757
20. GILBERT, SMITH et FREMLIN, *Nature* 139 (1937) 796
21. HEYN, *Nature* 139 (1937) 842
22. JACOBSEN, *Nature* 139 (1937) 879
23. CHANG, GOLDBERGER et SAGANE, *Nature* 139 (1937) 962
24. BERTL, FÜRTH, OBORUL et SITTE, *Nature* 139 (1937) 964
25. ROTBLAT, *Nature* 139 (1937) 1110
26. OESER et TANK, *Nature* 139 (1937) 1110
27. ROAF, *Proc. Roy. Soc. A* 153 (1936) 568
28. COCKCROFT et LEWIS, *Proc. Roy. Soc. A*, 154 (1936) 246 et 261
29. NUNN MAY et VAIDYANATHAN, *Proc. Roy. Soc. A* 155 (1936) 519
30. ELLIS et HENDERSON, *Proc. Roy. Soc. A* 156 (1936) 358
31. KEMPTON, BROWN et MAASDORF, *Proc. Roy. Soc. A* 157 (1936) 372
32. ID., *Proc. Roy. Soc. A* 157 (1936) 386
33. PANETH, GLUCKAUF et LOLEIT, *Proc. Roy. Soc. A* 157 (1936) 412
34. WARING et CHANG, *Proc. Roy. Soc. A* 157 (1936) 652
35. CHANG et SZALAY, *Proc. Roy. Soc. A* 159 (1937) 72
36. ROAF, *Proc. Roy. Soc. A* 159 (1937) 133
37. BOOTH et HURST, *Proc. Roy. Soc. A* 161 (1937) 248
38. DOPEL, *Z. f. Phys.* 99 (1936) 161
39. FLEISCHMANN et GENTNER, *Z. f. Phys.* 100 (1936) 440
40. STETTER, *Z. f. Phys.* 100 (1936) 652
41. MAIER-LEIBNITZ, *Z. f. Phys.* 101 (1936) 478
42. HAXEL, *Z. f. Phys.* 104 (1937) 540
43. DOPEL, *Z. f. Phys.* 104 (1937) 666
44. BOTHE et GENTNER, *Z. f. Phys.* 104 (1937) 685
- 44a JAECKEL, *Z. f. Phys.* 104 (1937) 762
45. MEYE, *Z. f. Phys.* 105 (1937) 232
46. BOTHE et GENTNER, *Z. f. Phys.* 106 (1937) 236
47. MEITNER, HAHN et STRASSMANN, *Z. f. Phys.* 106 (1937) 249
48. MEITNER et HAHN, *Naturw.* 24 (1936) 158
49. RONA et NEUNINGER, *Naturw.* 24 (1936) 491
50. GENTNER, *Naturw.* 25 (1937) 127
51. BOTHE et GENTNER, *Naturw.* 25 (1937) 90
52. ID., *Naturw.* 25 (1937) 126
53. ID., *Naturw.* 25 (1937) 191
54. KALLMANN et KUHN, *Naturw.* 25 (1937) 231
55. MULLER, *Naturw.* 25 (1937) 251
56. MAJER, *Naturw.* 25 (1937) 252
57. RIDDEMANN et STRASSMAN, *Naturw.* 25 (1937) 458
58. HARTKE, KNAUER et SCHAEFFER, *Naturw.* 25 (1937) 477
59. NAHMIAS, *C. R.* 202 (1936) 1050
60. WALEN, *C. R.* 202 (1936) 1500
61. NAHMIAS et WALEN, *C. R.* 203 (1936) 71
62. ID., *C. R.* 203 (1936) 176
63. CURIE et PREISWERK, *C. R.* 203 (1936) 787
64. WALEN et NAHMIAS, *C. R.* 203 (1936) 1149
65. BONNER et BRUBAKER, *Phys. Rev.* 49 (1936) 19
66. RICHARDSON, *Phys. Rev.* 49 (1936) 203
67. BONNER, DELSASSO, FOWLER et LAURITSEN, *Phys. Rev.* 49 (1936) 203
68. KURIE, RICHARDSON et PAXTON, *Phys. Rev.* 49 (1936) 203
69. CORCK et LAWRENCE, *Phys. Rev.* 49 (1936) 205
70. LIVINGOOD, *Phys. Rev.* 49 (1936) 206
71. PAXTON, *Phys. Rev.* 49 (1936) 206
72. THORNTON, *Phys. Rev.* 49 (1936) 207
73. CORÉ, RICHARDSON et KURIE, *Phys. Rev.* 49 (1936) 208
74. BONNER et BRUBAKER, *Phys. Rev.* 49 (1936) 223
75. KURIE, RICHARDSON et PAXTON, *Phys. Rev.* 49 (1936) 368
76. ALLISON, *Phys. Rev.* 49 (1936) 420
77. SNELL, *Phys. Rev.* 49 (1936) 555

78. FOWLER, DELSASSO et LAURITSEN, *Phys. Rev.* 49 (1936) 561
79. BONNER et BRUBAKER, *Phys. Rev.* 49 (1936) 778
80. CORK et LAWRENCE, *Phys. Rev.* 49 (1936) 788
81. GAERTTNER, TURIN et CRANE, *Phys. Rev.* 49 (1936) 793
82. MC MILLAN, *Phys. Rev.* 49 (1936) 875
83. POLLARD et BRASEFIELD, *Phys. Rev.* 49 (1936) 876
84. LIVINGOOD, *Phys. Rev.* 49 (1936) 876
85. VAN VOORHIS, *Phys. Rev.* 49 (1936) 876
86. ROBERTS, ZANDSTRA, CORTELL et MYER'S *Phys. Rev.* 49 (1936) 876
87. WILLIAMS et WELLS, *Phys. Rev.* 50 (1936) 186
88. MITCHELL, RASETTI, FINK et PEGRAM, *Phys. Rev.* 50 (1936) 189
89. BRASEFIELD et POLLARD, *Phys. Rev.* 50 (1936) 296
91. BONNER et BRUBAKER, *Phys. Rev.* 50 (1936) 308
92. SAMPSON, RIDENOUR et BLEAKNEY, *Phys. Rev.* 50 (1936) 382
93. LIVINGOOD, *Phys. Rev.* 50 (1936) 385
94. LYMAN, *Phys. Rev.* 50 (1936) 385
95. LASLETT, *Phys. Rev.* 50 (1936) 388
96. LAMB, *Phys. Rev.* 50 (1936) 388
97. LIVINGOOD, *Phys. Rev.* 50 (1936) 391
98. SPEH, *Phys. Rev.* 50 (1936) 395
99. ANTHONY, *Phys. Rev.* 50 (1936) 395
100. LIVINGSTON et HOFFMAN, *Phys. Rev.* 50 (1936) 401
101. MITCHELL, RASETTI, FINK et PEGRAM, *Phys. Rev.* 50 (1936) 401
102. LIVINGOOD, *Phys. Rev.* 50 (1936) 425
103. LIVINGOOD et SEABORG, *Phys. Rev.* 50 (1936) 435
104. HAFSTAD, HEYDENBURG et TUVE, *Phys. Rev.* 50 (1936) 504
105. BROWN et MITCHELL, *Phys. Rev.* 50 (1936) 593
106. RUMBAUGH et HAFSTAD, *Phys. Rev.* 50 (1936) 681
107. SPEH, *Phys. Rev.* 50 (1936) 689
108. ANTHONY, *Phys. Rev.* 50 (1936) 726
109. BONNER et BRUBAKER, *Phys. Rev.* 50 (1936) 781
110. POLLARD et BRASEFIELD, *Phys. Rev.* 50 (1936) 890
111. VAN VOORHIS, *Phys. Rev.* 50 (1936) 895
112. ZUNN et SEELEY, *Phys. Rev.* 50 (1936) 1101
113. SAGANE, *Phys. Rev.* 50 (1936) 1141
114. LYMAN, *Phys. Rev.* 51 (1937) 1
115. POLLARD et BRASEFIELD, *Phys. Rev.* 51 (1937) 8
116. GAERTTNER et CRANE, *Phys. Rev.* 51 (1937) 49
117. POLLARD, SCHULTZ et BRUBAKER, *Phys. Rev.* 51 (1937) 140
118. SNELL, *Phys. Rev.* 51 (1937) 143
119. PAXTON, *Phys. Rev.* 51 (1937) 170
120. ALLEN, *Phys. Rev.* 51 (1937) 182
121. GIBSON, SEABORG et GRAHAM, *Phys. Rev.* 51 (1937) 370
122. THORNTON et CORK, *Phys. Rev.* 51 (1937) 383
123. POOL et CORK, *Phys. Rev.* 51 (1937) 383
124. KRAUS et CORK, *Phys. Rev.* 51 (1937) 383
125. DELSASSO, FOWLER et LAURITSEN, *Phys. Rev.* 51 (1937) 391
126. WILLIAMS, WELLS, TATE et HILL, *Phys. Rev.* 51 (1937) 434
127. WATKE, *Phys. Rev.* 51 (1937) 439
128. DELSASSO, FOWLER et LAURITSEN, *Phys. Rev.* 51 (1937) 527
129. WAY, *Phys. Rev.* 51 (1937) 552
130. BREIT et WIGNER, *Phys. Rev.* 51 (1937) 593
131. ROBERTS, *Phys. Rev.* 51 (1937) 810
132. POOL, CORK et THORNTON, *Phys. Rev.* 51 (1937) 890
133. THORNTON, *Phys. Rev.* 51 (1937) 893
134. AMALDI, HAFSTAD et TUVE, *Phys. Rev.* 51 (1937) 896
135. MITCHELL, *Phys. Rev.* 51 (1937) 995
136. DU BRIDGE, BARNES et BUCK, *Phys. Rev.* 51 (1937) 995
137. BERNARDINI et BOCCIARELLI, *Ricerca Scient.* 71 (1936) 128
138. FOMIN et HOUTERMANS, *Ph. Z. Sowjetunion* 9 (1936) 273
139. RUSINOV et LATISHEV, *Ph. Z. Sowjetunion* 9 (1936) 287
140. ALICHANIAN, ALICHANOW et DZELEPOW *Ph. Z. Sowjetunion* 10 (1936) 78
141. RUSINOV et SAGAIKAK, *Ph. Z. Sowjetunion* 10 (1936) 203
142. MAMASACHISOW, *Ph. Z. Sowjetunion* 10 (1936) 214
143. RUSINOV, *Ph. Z. Sowjetunion* 10 (1936) 219
144. GOLOBORODKO et ROSENKEWITSCH, *Ph. Z. Sowjetunion* 11 (1937) 78
145. ALICHANIAN, *Ph. Z. Sowjetunion* 11 (1937) 462
146. STETTER, *Phys. Z.* 37 (1936) 88.
147. DOPEL, *Phys. Z.* 37 (1936) 96
148. POSE, *Phys. Z.* 37 (1936) 154
149. DIEBNER et GRASSMANN, *Phys. Z.* 37 (1936) 359
150. FUNFER, *Phys. Z.* 37 (1936) 693
151. NEUERT, *Phys. Z.* 38 (1937) 122
152. DIEBNER et GRASSMANN, *Phys. Z.* 38 (1937) 406
153. NAHMAS et WALEN, *J. Phys. et Rad.* 8 (1937) 162
154. BERNARDINI et BOCCIARELLI, *Lincei Renc.* 24 (1936) 59 et 132
155. DEISENROTH-MYSSOWSKY, LATYSHEV, RUSINOV et EICHELBERGER, *C. R. Moscou* 1 (1936) 351
156. NAIDU, *Proc. Phys. Soc.* 48 (1936) 332
157. NEUNINGER et RONA, *Wien-Anz.* (1936) 159
158. SLACK et EHRCKE, *Rev. Sc. Instr.* 8 (1937) 193
159. THOMSON et SAXTON, *Phil. Mag.* 23 (1937) 141
160. SAVEL, *Ann. de Phys.* 4 (1936) 88
161. NISHIDA, *Jap. Journ. Phys.* 11 (1936) 9
162. FAY et PANETH, *Journ. Chem. Soc.* (1936) 384

163. PIEDAD DE LA CIERVA, *Ann. Soc. Espan Fisica Quim.* 34 (1936) 541
164. DOPEL, *Ann. der Phys.* 28 (1937) 87
165. FUNFER, *Ann. der Phys.* 29 (1937) 1
166. MEITNER, *Ann. der Phys.* 29 (1937) 246
167. ECKARDT, *Ann. der Phys.* 29 (1937) 497
168. ANDERSEN, *Z. S. phys. Chem.* 32 (1936) 237
169. ERBACHER et PHILIPP, *Z. S. phys. Chem.* 176 (1936) 169
170. BURCHAM et GOLDHABER, *Proc. Camb.* 32 (1936) 632
171. BURHOP, *Proc. Camb.* 32 (1936) 643
172. LEWIS et BURCHAM, *Proc. Camb.* 32 (1937) 503
173. KNOL et VELDKAMP, *Physica* 3 (1936) 145
174. SIZOO et KOENE, *Physica* 3 (1936) 1053
175. HEYN, *Physica* 4 (1937) 160
176. VELDKAMP et KNOL, *Physical* 4 (1937) 166
177. FISCHER, *Verh. D. Phys. Ges.* 18 (1936) 18
178. ARAKATSU, KIMURA et UEMURA, *Mem. Fa Sc. Taihoku Imp. Univ.* 18 (1936) 75
179. HAHN, *Chem. Ber.* 69 (1936) 217
180. ERBACHER et PHILIPP, *Chem. Ber.* 69 (1936) 893
181. HAHN, MEITNER et STRASSMANN, *Chem. Ber.* 69 (1936) 905
182. ID., *Chem. Ber.* 70 (1936) 1374
183. GUÉBEN, *Ann. Soc. Sc. Brux.* 57 (1937) 22
184. HEVESY et LEVI, *Kgl. Danske Vid. Selsk.* 14 (1936)
185. FISCHER-COLBRIE, *W. B.* 145 (1936) 283
186. GUÉBEN, *Rev. quest. scient.* 4° s. 29 (1936) 251
187. ID., *Rev. quest. scient.* 5° s. 1 (1937) 263
188. I. JOLIOT-CURIE, GRINBERG et WALÉN, *Données annuelles de constantes numériques*, avril 1936.
189. GUÉBEN, *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège* (1937) n° 6-7, 203
-

SUR LA DÉPOLARISATION DE LA LUMIÈRE TRANSMISE PAR LES SOLUTIONS COLLOÏDALES

Note de MM. AUGUSTIN BOUTARIC et LOUIS BERNARD

Procopiu (1) a montré qu'un faisceau de lumière polarisée traversant une cuve à faces parallèles qui renferme une suspension grossière dont les particules sont formées d'une substance anisotrope est partiellement dépolarisée à sa sortie. Le faisceau qui a traversé la cuve, peut être considéré comme la superposition d'un faisceau de lumière polarisée d'intensité P et d'un faisceau de lumière naturelle d'intensité N, la dépolarisation produite par la suspension peut s'exprimer par :

$$\delta = \frac{N}{N + P}$$

Petrescu (2) a d'autre part constaté sur de nombreuses solutions colloïdales (O^3Fe^2 , O^5V^2 , SCl , O^3Al^2 , $Fe(CN)^6Cu^2$), que ces solutions ne produisent aucune dépolarisation d'un faisceau de lumière polarisée qui les traverse, même lorsqu'elles sont constituées par des particules anisotropes et qu'on les prend sous de fortes concentrations. Il a signalé également que si l'on produit la floculation de la solution colloïdale, notamment par l'action d'un électrolyte ou par chauffage, la suspension grossière et instable obtenue après agitation du sol floculé détermine une dépolarisation souvent notable de la lumière transmise.

Il nous a paru intéressant d'examiner comment varie, en fonction du temps, la dépolarisation produite par une solution colloïdale additionnée d'une quantité suffisante d'électrolyte pour en provoquer la floculation.

Après avoir mélangé, à volumes égaux, la solution colloïdale et la solution électrolytique, on introduisait le mélange ainsi réalisé dans une cuve à faces parallèles traversée par un faisceau de lumière polarisée et on déterminait le degré de dépolarisation δ au moyen du photopolarimètre de Cornu en utilisant la méthode indiquée par Procopiu.

(1) PROCOPIU. — Biréfringence électrique des suspensions *Thèse*, série n° 962, Paris 1924, **CR**, t. 173, p. 409, 1921.

(2) PETRESCU. — Recherches expérimentales sur la dépolarisation. *Ann. Scientifiques Université Jassy*, t. 17, 1931.

Les expériences ont porté sur la floculation par les électrolytes de solutions colloïdales de S^3As^2 , de O^3Fe^2 , d'argile, et sur la floculation réciproque des sols de O^3Fe^2 et S^3As^2 .

Les tableaux ci-dessous reproduisent les résultats relatifs à la floculation d'un sol de S^3As^2 (0,88 g par litre) et d'un sol de O^3Fe^2 (1,54 g par litre), dont la floculation était déterminée par le mélange à volumes égaux de la solution colloïdale avec une solution de C/K de diverses concentrations; dans les tableaux I et II, la concentration de C/K qui est indiquée est celle réalisée dans le mélange obtenu en ajoutant la solution électrolytique à la solution colloïdale.

TABLEAU I
FLOCULATION PAR C/K D'UN SOL DE S^3As^2 .
(cuve 1 cm., $\lambda = 519 \text{ m}\mu$.)

t	$\delta \times 100$			
	C/K N/5	C/K N/4	C/K N/3	C/K N/2
0				76
1 min.			9.6	76
2		7.2	27.2	»
3		12.5	44	»
4		14.4	61	»
5	4.5	19.6	63	»
6	6	23	66	»
7	7.1	27.3	69	»
8	8.2	30	69	»
9	9.1	34.2	»	»
10	9.6	38.1	»	»
12	12.5	44	»	»
14	14.4	50	»	»
16	17	53.1	»	»
18	18.2	55	»	»
20	20.5	56	»	»
25	25.4	»	»	»
30	33	»	»	»
35	38.1	»	»	»
40	44	»	»	»
45	44	»	»	»

Les variations de δ en fonction du temps t ont été représentées sur les courbes des figures 1 et 2.

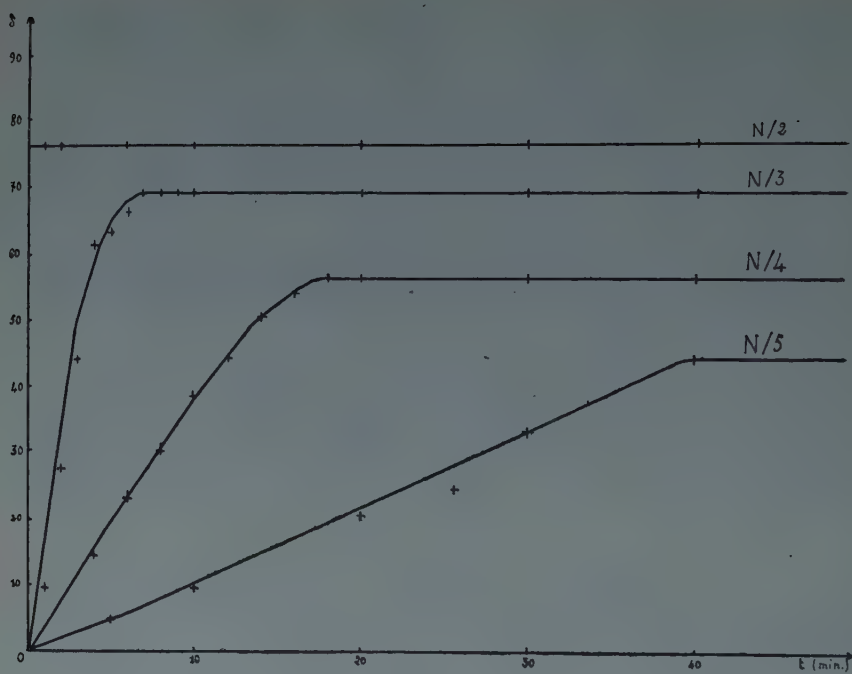


FIG. 1.

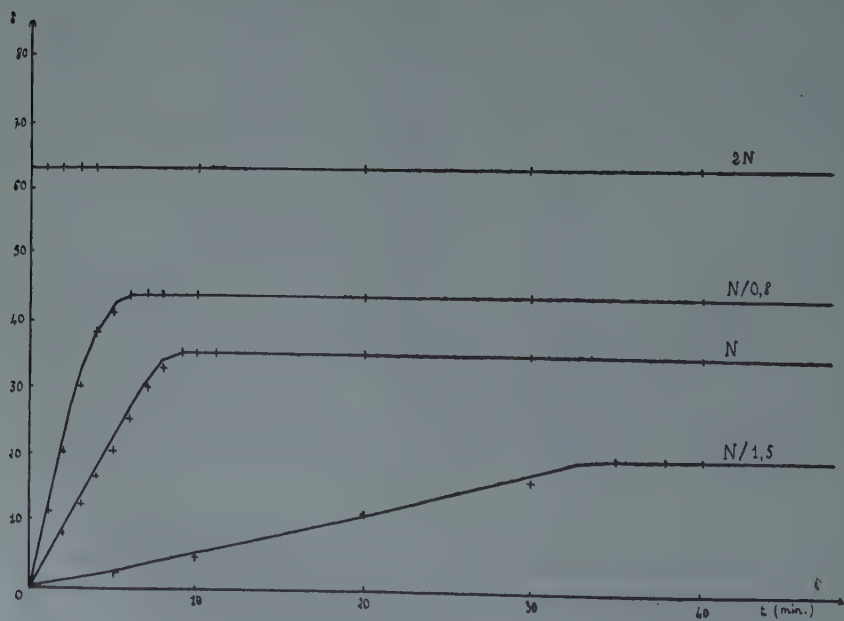


FIG. 2.

TABLÉAU II
FLOCCULATION PAR Cl K D'UNE SOLUTION D'HYDRATE FERRIQUE.
(cuve 2 cm. — $\lambda = 0\mu 573$).

t	$\delta \times 100$			
	Cl K N/1,5	Cl K N	Cl K N/0,8	Cl K 2 N
0				63
1 min.		4,5	11,4	63
2		8	20,5	»
3		12,5	30	»
4		16,8	38,2	»
5	2,2	20,5	41	»
6	3	25,4	44	»
7	3,6	30	44	»
8	3,9	33	»	»
9	4	35,2	»	»
10	4,5	35,2	»	»
12	6,5	»	»	»
14	7,8	»	»	»
16	8,6	»	»	»
18	10	»	»	»
20	11,4	»	»	»
25	14,4	»	»	»
30	16,8	»	»	»
35	20	»	»	»
40	20	»	»	»
45	»	»	»	»

Des mesures ci-dessus rapportées on peut tirer les conséquences suivantes :

1^o) A mesure que croît le temps t qui s'est écoulé à partir du moment où l'on a mélangé la solution colloïdale et la solution électrolytique, la dépolarisation δ qui part d'une valeur nulle augmente progressivement pour atteindre une certaine limite Δ au bout d'un temps Θ qui peut être pris comme mesure de la durée de l'évolution précédant la floculation de la solution colloïdale.

L'étude de la dépolarisation de la lumière transmise fournit ainsi une méthode précise pour déterminer la durée de floculation des solutions colloïdales, comparable à celle que constitue l'étude du coefficient d'absorption lumineuse relatif à une radiation déterminée préconisée antérieurement par l'un de nous (1).

(1) A. BOUTARIC. — *Journal de chimie physique*, t. 25, p. 120; 1928. Voir également A. BOUTARIC et M. VUILLAUME, C. R., t. 172, p. 1293; 1921.

2°) La valeur limite Δ obtenue pour la dépolarisation croît avec la concentration de l'électrolyte dans le mélange flocculant et varie par suite en sens inverse de la durée Θ de la floculation

3°) Il est intéressant de signaler que la valeur limite Δ ainsi obtenue pour la dépolarisation paraît bien liée à la structure atteinte par les agrégats de micelles qui prennent naissance au cours de la floculation. Si, en effet, après que s'est produite la sédimentation, on agite à nouveau le flocculat de manière à le remettre en suspension, on retrouve, en étudiant rapidement la suspension grossière ainsi réalisée, une valeur de la dépolarisation égale à la valeur limite Δ observée au cours de l'étude de la dépolarisation en fonction du temps durant la floculation.

Ayant pu disposer d'une solution colloïdale d'argile, mise aimablement à notre disposition par M. A. Demolon, directeur de l'Institut des recherches agronomiques (Versailles), nous avons constaté que cette solution colloïdale, pourtant très stable, surtout en présence de très faibles concentrations en OHNa , produit une dépolarisation très nette sur la lumière polarisée qui la traverse. On peut en conclure que le résultat indiqué par V. Petrescu, quoique valable dans la plupart des cas, ne saurait être regardé comme absolument général et qu'il est possible d'observer une dépolarisation très nette sur des suspensions présentant les caractères essentiels des solutions colloïdales les plus typiques.

Il ne paraît pas douteux que la valeur de la dépolarisation dépend, pour une épaisseur de cuve et une longueur d'onde déterminées : 1°) de la concentration; 2°) de l'anisotropie des particules; 3°) de leur grosseur, un accroissement de chacun de ces 3 facteurs entraînant un accroissement de la dépolarisation.

Si la solution colloïdale d'argile présente à cet égard une activité exceptionnelle, il semble que l'on puisse attribuer ce résultat à l'anisotropie bien caractéristique des particules qui la constituent, ainsi qu'à leurs dimensions relativement considérables.

Une addition de soude qui détermine une diminution de la grosseur des particules, surtout sensible pour des concentrations comprises entre $N/1000$ et $N/100$, entraîne, à égalité de concentration en argile de la suspension, une diminution notable du degré de dépolarisation qui, pour des solutions de 0,225 g. par litre, passe de la valeur 0,33, lorsque le milieu solvant est constitué par l'eau, à la valeur 0,304, lorsque le milieu solvant est millinormal en soude et à 0,27 lorsqu'il est de concentration centinormale en soude.

Lorsqu'on provoque la floculation de la solution colloïdale d'argile par addition de Cl^2Ba , on retrouve des particularités analogues à

celles constatées sur les sols de S^3As^2 et O^3Fe^2 , mais cependant moins nettes, comme le montrent les résultats rassemblés dans le tableau III.

TABLEAU III

FLOCCULATION PAR Cl^2Ba D'UNE SOLUTION COLLOIDALE D'ARGILE DE 0,9 G PAR LITRE.

(Epaisseur de la cuve 5 cm., $\lambda = 519 m\mu$)

t	$\delta \times 100$		
	Cl^2Ba N/400	Cl^2Ba N/300	Cl^2Ba N/100
0	63	63	76
1		64,6	76
2		66	»
3		67,5	»
4		69	»
8		72	»
10	64,2	72	»
15	66	»	»
30	69	»	»
35	69	»	»

La dépolarisation, qui est considérable en l'absence de tout électrolyte, passe d'une valeur égale à 0,63 pour la suspension diluée dans l'eau distillée (concentration égale à 0,45 par litre) aux valeurs 0,69, 0,72 et 0,74 après floculation par des doses croissantes de Cl^2Ba , la valeur la plus forte correspondant à une floculation instantanée.

CONCLUSIONS

Les résultats des mesures rapportées dans ce travail permettent de formuler un certain nombre de conclusions générales :

1^o) La plupart des solutions colloïdales, qui ne dépolarisent pas la lumière transmise, acquièrent cette propriété durant la floculation; le degré de dépolarisation va en croissant au cours de la floculation, en sorte que sa mesure fournit une excellente méthode pour déterminer la durée de l'évolution précédant la floculation.

2^o) Certaines suspensions stables comparables par l'ensemble de leurs propriétés aux solutions colloïdales les mieux caractérisées sont susceptibles, en l'absence de toute floculation, de dépolariser la lumière qui les traverse; le degré de dépolarisation augmente encore

nettement au cours de la floculation et permet d'en apprécier la durée.

3°) La dépolarisation limite de la lumière transmise atteinte au cours de la floculation, permet de caractériser l'anisotropie et l'état d'agrégation des micelles floculées.

*Faculté des Sciences de Dijon,
Laboratoire de Chimie-Physique.*

LE DOSAGE SPECTROGRAPHIQUE DU NIOBIUM ET DU TANTALE

par R. BRECKPOT et J. CREFFIER

La détermination quantitative du niobium et du tantale constitue un problème analytique difficile. La méthode chimique la plus employée actuellement est la méthode au tanin de Schöeller et Powell (1). L'analyse se complique généralement du fait de la présence simultanée de titane.

Nous avons étudié la possibilité du dosage spectrographique du niobium à côté du tantale ainsi que l'influence de la présence éventuelle de titane.

Comme on isole au cours des processus analytique ou industriel des mélanges d'oxydes Nb_2O_5 , Ta_2O_5 , TiO_2 , il était indiqué de mettre au point une méthode spectrale pouvant porter directement sur de tels mélanges.

Nous avons étudié d'abord le mélange binaire $\text{Nb}_2\text{O}_5 + \text{Ta}_2\text{O}_5$ depuis le niobium pur avec une trace de tantale, jusqu'au tantale pur avec une trace de niobium.

Pour la préparation des divers mélanges d'oxydes, nous sommes partis de niobium et de tantale très purs.

Le niobium en tiges de 5 mm de diamètre est le produit Hilger H.S. n° F. 689, renfermant comme seule impureté importante 0,2 à 0,3 % d'étain (2), avec une trace de cuivre et de fer, mais exempt de tantale.

Le tantale est le métal Siemens, en fils de 1,5 mm de diamètre, très pur, spectroscopiquement exempt de niobium.

(1) *Analyst.* **50**, 485, 1925; **61**, 806, 1936.

(2) Selon le bulletin d'analyse de Hilger.

PRÉPARATION DES OXYDES.

Les oxydes ont été obtenus par deux méthodes différentes : 1^o) par évaporation des solutions fluo-nitriques en présence d'acide sulfurique ; 2^o) aux dépens des solutions oxaliques.

1^o) Solutions fluo-nitriques.

On dissout le métal dans un mélange à volumes égaux d'acide nitrique concentré et d'acide fluorhydrique à 40 % (60 cc. du mélange pour 10 grs de métal). Si l'on prend soin de ne pas chauffer au-dessus de 70°, la dissolution peut être menée dans une capsule de quartz.

La dissolution est terminée en quelques heures. On transvase, porte au volume et conserve en flacons paraffinés.

Le titre des solutions a été contrôlé avec soin par gravimétrie. Il était établi de façon à avoir environ 10 mgrs par centimètre cube.

Les mélanges d'oxydes ont été obtenus par évaporation des quantités voulues des solutions fluo-nitriques après addition d'un peu d'acide sulfurique (3 à 4 cc. H_2SO_4 conc. pour 50 cc. de solution). L'addition d'acide sulfurique est nécessaire pour éviter des pertes de niobium par volatilisation à l'état de fluorure lors de la calcination. Les oxydes calcinés sont soigneusement homogénéisés.

2^o) Solutions oxaliques.

On prépare d'abord la solution fluonitrique comme ci-dessus. On précipite à l'ammoniaque et redissout l'oxyde fraîchement précipité dans une solution chaude d'acide oxalique à 15 % (1). On porte au volume et établit le titre exact par un dosage gravimétrique sous forme de Nb_2O_5 et Ta_2O_5 . On mélange les solutions niobiques et tantaliques en proportions voulues, évapore et calcine. Il faut calciner assez longuement pour détruire tout le carbone. Les mélanges bien homogènes se détachent facilement de la capsule de quartz et tiennent mieux l'arc que ceux obtenus par la première méthode.

CONDITIONS D'ENREGISTREMENT.

Environ 100 mgrs d'oxyde sont introduits dans une cuvette, en forme d'entonnoir, creusée à l'extrémité d'une tige de graphite pur à l'aide d'une vrille de même diamètre que la tige.

La seconde électrode est constituée par une tige de graphite taillée en pointe.

(1) *J. Am. Chem. Soc.*, **54**, I, 438, 1932.

L'électrode portant l'oxyde doit être la cathode; dans ces conditions l'arc est plus stable. En outre les raies du tantale sont fortement dépréciées si la substance est volatilisée sur anode.

L'intensité du courant a été maintenue à 1 ampère et l'ouverture de l'arc réglée de façon à avoir une chute de potentiel d'environ 65 volts. Les enregistrements étaient prolongés pendant 3 minutes. L'image de l'arc était formée sur le prisme du spectrographe de façon à réaliser une illumination uniforme de la fente. Devant celle-ci était placé le secteur tournant à échelons.

Le spectrographe utilisé est le spectrographe moyen de Hilger E 315 muni du châssis pour plaques extra-fines, épousant la courbure focale.

L'analyse de spectres aussi complexes que ceux dont il est ici question est cependant réalisable avec un spectrographe de ce type, à condition que le réglage en soit fait très soigneusement et qu'on opère avec une fente très étroite.

Nous avons réglé la fente à 0,007 mm environ.

TABLEAU DE DOSAGE.

Toutes les lectures ont été faites visuellement en examinant les plaques au projecteur avec un grossissement de 20. Nous avons employé le secteur logarithmique habituel de raison 2,5.

Les chiffres portés dans le tableau I indiquent pour chaque paire homologue le nombre d'échelons séparant les tronçons de même densité, les valeurs fractionnaires sont obtenues par interpolation. On peut estimer facilement le quart d'échelon et même le huitième lorsque les raies sont de densité voisine.

Lorsque les raies sont de même intensité l'écart est nul et l'on trouve dans le tableau l'indication 0. Les valeurs positives signifient que la raie du niobium est plus intense que celle du tantale, les valeurs précédées du signe — indiquent une raie Nb plus faible que la raie de comparaison Ta.

L'indication tr. (trace) indique une raie encore faiblement visible mais plus mesurable.

Nous avons fait choix d'un ensemble de raies particulièrement favorables pour le dosage, c'est-à-dire formant des paires homologues de raies voisines et d'intensités diverses. On dispose ainsi, le long de l'échelle des pourcents, de plusieurs repères constitués par des raies homologues de densité égale.

Les principales coïncidences ou proximités pouvant donner lieu à des confusions sont indiquées dans le tableau II.

TABLE I
NIOBIUM-TANTALE.

Nb	Ta	Nb %										99、
		0.1	0.3	1	3	10	30	50	70	90	97	
2398.60	2400.63							-1.5	-0.5	+0.75	+1.6	
2591.0	2603.2					-1.75	-0.6	+0.25	+1.1			
2673.66	2675.99						-1.75	-0.87	0	+1.1		
2673.66	2714.68						-2	-1	-0.1	+1.1	+2	
2707.81	2710.22								-1.25	+0.1	+1	
2707.81	2714.68							0	-2	-1	0	
2716.69	2714.68					-2	-0.9	0	+0.75	+2		
2716.69	2718.45				-0.5	+0.25	+2	+1.1	+2			
2740.25	2739.35				-1.9	-1.1	+0.5	+1.6				
2883.32	2891.95		tr.	-2	-0.9	0	+1.5	0	+1.1			
2883.32	2881.34				-2	-1	-1	0				
2888.93	2891.95			-2.25	-0.9	-0.1	1.5				+1.1	
2927.82	2925.25			0	+1.1							
2927.82	2926.55	tr.	-1.9		-1.75	-1	+0.6	+1.5				
2927.82	2933.67			-1.4	-0.1	+1						
2950.91	2952.05			+0.1	+1.1							
2950.91	2926.55	tr.	-1.1	-2	-1	-0.1	+1.5					
3194.95	3192.35			-1.1	-1							
3194.95	3198.77		-1.1	0	+1	+1.1						
3225.47	3223.98	tr.	tr.	-1	0							
3225.47	3226.45	tr.	-1.5	0	+1		-1	0	+0.9			
3312.74	3311.14											

Les longueurs d'onde sont données d'après KAYSER, *Handbuch der Spektroskopie*, vol. 6, p. 128 et 566.

TABLE II
COINCIDENCES

Niobium

2398.60 Inutilisable en présence de beaucoup de *calcium* Ca 2398.58 I 8 R.

Tantale

2675.99 Coïncide avec la raie persistante de l'*or* Au 2675.95 I 10 R.
2710.22 Coïncide avec la raie persistante de l'*indium* In 2710.15 I 10 R.
2718.45 Coïncidence *fer* 2718.45 Fe4-2717.79 Fe3,
2881.34 Attention à la raie ultime du *silicium* Si 2881.56 à 0,03 mm.
2925.25 Coïncidence *fer* 2925.36 Fe3-2925.90 Fe3.
2926.55 Inutilisable en présence de *fer* 2926.58 Fe II 5 raie persistante.
2952.05 Coïncidence *vanadium* 2952.08 V II 8.

Nous avons établi les valeurs relatives des raies homologues depuis 0,1 % Nb + 99,9 % Ta jusqu'à 99 % Nb + 1 % Ta (pourcentages en grammes).

Remarquons que la persistance du niobium dans le tantale est bien meilleure que celle du tantale dans le niobium. Le Nb est visible jusque 0,03% et se dose encore nettement à 0,3 %, tandis que le tantale n'est plus visible à 0,3 %, et même à 1 % on ne dispose plus que d'une seule raie, Ta 2714,68, pour le dosage.

Si l'on porte les résultats du tableau en diagramme, mettant en ordonnée le nombre d'échelons séparant les tronçons de même densité et en abscisse la concentration exprimée en atomes % au lieu de grammes %, on obtient des courbes pratiquement linéaires entre 3 et 80% Nb. Aux faibles pourcents il y a avantage, comme d'habitude, à porter dans les diagrammes le logarithme de la concentration.

INFLUENCE DU TITANE

Il était important de vérifier l'influence du titane sur la détermination du rapport niobium /tantale. Nous avons établi une nouvelle série de mélanges contenant en milligrammes :

Nb	3	10	30	50	70
Ta	97	90	70	50	30
Ti	10	10	10	10	10

Une autre série ne contenait chaque fois que 1 mg. de Ti (1).

Dans l'un et l'autre cas, les valeurs relatives des raies analytiques du niobium et du tantale sont restées inaltérées.

On peut donc, même en présence de 9,1 % de titane, se servir des courbes de dosage établies pour le système binaire.

*Université de Louvain,
Laboratoire de Chimie Analytique.*

ÉTUDE SPECTROGRAPHIQUE D'ALLIAGES TERNAIRES A BASE DE PLOMB

par R. BRECKPOT, J. CREFFIER et O. PERLINGHI

L'analyse spectrale est basée sur la mesure de la variation de l'intensité des raies d'impur en fonction de la concentration. L'intensité est déterminée en valeur relative, prenant comme point de comparaison certaines raies appropriées du constituant de base.

Lorsque celui-ci prédomine largement, comme c'est le cas dans les métaux purs, on peut considérer, pour le dosage de chaque impureté, le système binaire formé par l'impureté et le métal de base. Les autres impuretés simultanément présentes n'influencent pas les relations d'intensité spectrale que l'on peut établir une fois pour toutes à l'aide de mélanges binaires synthétiques. Ceci est vrai, d'une façon générale, pour des doses de constituant secondaire plus petites que 0,3 %. Dans de nombreux cas, même à 1 % et au delà, il n'y a pas d'influence réciproque.

La mise au point de méthodes analytiques pour le plomb d'œuvre, nous a amenés à considérer systématiquement quelques systèmes ternaires et d'ordre supérieur à base de plomb. On trouve en effet dans le plomb d'œuvre des doses d'antimoine, d'étain et d'arsenic atteignant et dépassant 1 % et même 3 %. D'autres éléments comme l'argent et le cuivre s'y rencontrent également en doses plus ou moins massives. Le problème de l'influence réciproque se pose donc.

Nous avons commencé par l'étude du système ternaire : plomb-étain-antimoine, en faisant varier les doses d'étain et d'antimoine entre 0,1 % et 3 %.

(1) La solution de titane a été préparée au dépens de $\text{Ti}(\text{O H})^4$ dissous dans H_2SO_4 12 N.

CONDITIONS D'ENREGISTREMENT.

Les courbes de dosage des systèmes binaires Pb-Sn et Pb-Sb ont été établies, à partir de 3 %, par l'un de nous et G. Sempels (1). L'étain est visible jusqu'à 0,002 % environ, tandis que la persistance de l'antimoine est beaucoup plus réduite, ne dépassant guère 0,01 % dans les conditions expérimentales adoptées.

Les enregistrements sont faits dans l'arc électrique de faible ampérage (1 ampère) et sous voltage constant de 25 V, ce qui correspond à un écartement des électrodes d'environ 2,8 mm. Les électrodes sont taillées dans des pièces massives de plomb, de façon que l'on puisse opposer deux surfaces planes et parallèles d'environ 2-3 cm². L'arc ne tient que quelques instants en un point donné. Dès que ce point est attaqué et oxydé, l'arc se déplace vers les régions voisines non encore oxydées, balayant ainsi progressivement toute la surface disponible des électrodes. On doit veiller à maintenir l'image de l'arc centrée sur la collimatrice du spectrographe, en agissant sur le support d'arc.

Les courbes de dosage sont dressées comme suit : on porte en abscisse le logarithme de la concentration (2) et en ordonnée l'inverse des temps d'exposition qu'il y a lieu de réaliser pour obtenir l'égalité de densité des raies homologues (3). La réduction du temps d'exposition est obtenue, comme dans les publications antérieures de ce laboratoire, par emploi d'un secteur à échelons.

On peut, plus simplement, porter en abscisse le nombre entier ou fractionnaire (par interpolation) d'échelons $\Delta\epsilon$ séparant les tronçons de même densité (4).

Une différence d'un échelon correspond, avec le secteur utilisé, à un rapport des temps d'exposition de 1 à 2,5 ou l'inverse. On affecte la différence $\Delta\epsilon$ du signe positif, lorsque la raie de l'élément dosé est plus intense que la raie de base, du signe négatif, lorsqu'elle est plus faible. A l'égalité de densité $\Delta\epsilon = 0$.

Pour un élément donné, les courbes sont généralement linéaires et

(1) Ces *Annales* LVII, p. 129, 1937, et *Bull. Soc. Chim. Belg.*, **46**, 1937.

(2) Les concentrations sont exprimées en grammes pour cent.

(3) Dans les publications antérieures dans ces *Annales*, nous avons appelé cette valeur « intensité relative apparente ».

(4) L'interpolation peut se faire, par examen visuel au spectroprojecteur (grossissement 20), au huitième d'échelon lorsque les raies sont de densité voisine; au quart d'échelon dans les situations moins favorables. Photométriquement on atteint le dixième d'échelon en appliquant la méthode des trois points décrite dans ces *Annales*, **54**, p. 309, 1937.

parallèles entre elles, entre certaines limites de concentration, sauf pour certaines raies, dont le comportement est particulier (1). D'un élément à l'autre on trouve des différences caractéristiques. C'est ainsi que la pente moyenne pour les raies de l'antimoine et de l'arsenic peut être représentée par un angle de tangente 1,4, tandis que pour l'étain et le bismuth, par exemple, la pente est plus atténuée. (tang. = 0,85).

Les courbes 1 des figures 1 et 2 correspondent respectivement à l'antimoine et à l'étain dans le plomb pur. Les paires homologues sont :

Sb 3232,52 et Pb 3240,20 (fig. 1)

Sn 2661,25 et Pb 2657,16 (fig. 2).

La plupart des mesures sur spectres dégradés, dont il est fait usage dans le présent travail, ont été faites visuellement.

Les divers alliages ont été préparés avec soin, par fusion, en tubes de Pyrex sous un vide de 20-30 mm à température modérée. La composition des principaux termes a été contrôlée par analyse chimique.

INFLUENCE DE L'ÉTAIN SUR LE DOSAGE DE L'ANTIMOINE.

Partant des alliages plomb-antimoine à 0,3 %, 1 % et 3 % Sb, nous y avons ajouté des doses croissantes d'étain, réalisant les neuf échantillons dont la composition en grammes est indiquée au tableau ci-dessous.

N°	Plomb	Antimoine	Étain
1	99.7	0.3	0.3 grammes
2	»	»	1.0 »
3	»	»	3.1 »
4	99.0	1.0	0.3 »
5	»	»	1.0 »
6	»	»	3.1 »
7	97.0	3.0	0.3 »
8	»	»	1.0 »
9	»	»	3.1 »

(1) La courbe correspondant à la paire homologue Sn 2661,25 et Pb 2657,16 est pratiquement linéaire entre 0,1 et 1 %. Au-dessus de 1 % la pente devient rapidement plus forte.

Les échantillons 1 à 9 ont été ensuite spectrographiés dans les conditions définies plus haut.

L'examen des spectres des échantillons n° 1, 2 et 3 montre que l'intensité relative des raies homologues est la même en présence des diverses doses d'étain; on lit d'ailleurs la même valeur qu'en absence

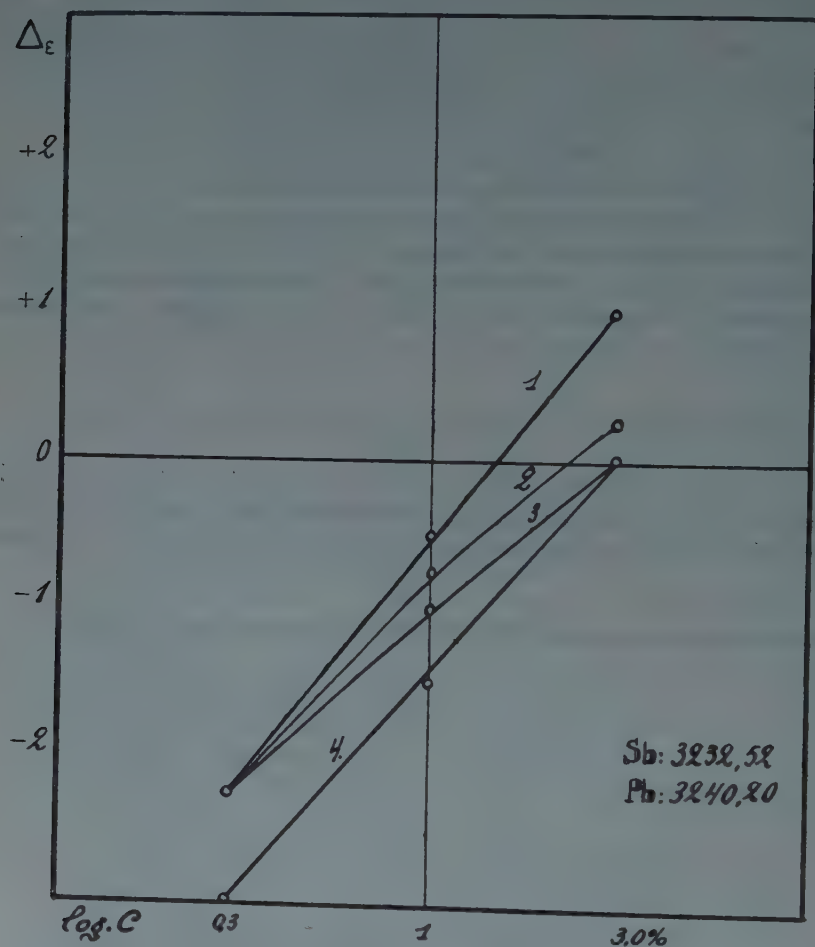


Figure 1. — DOSAGE DE L'ANTIMOINE. INFLUENCE DE L'ÉTAIN.

1°) Système binaire Pb + Sb.

» » » + 0,3 % Sn.

2°) » » » + 1,0 % Sn.

3°) » » » + 3,1 % Sn.

4°) Arc métal — /graphite + avec et sans étain (0,3-3 %).

d'étain, c'est-à-dire avec l'alliage binaire Pb + 0,3 Sb. L'étain est donc sans effet à cette teneur en antimoine.

Par contre à l'examen des échantillons n° 7, 8 et 9 on constate une influence très marquée de l'étain. Si le n° 7 donne sensiblement le même résultat que l'alliage binaire Pb + 3,0 % Sb, l'addition de

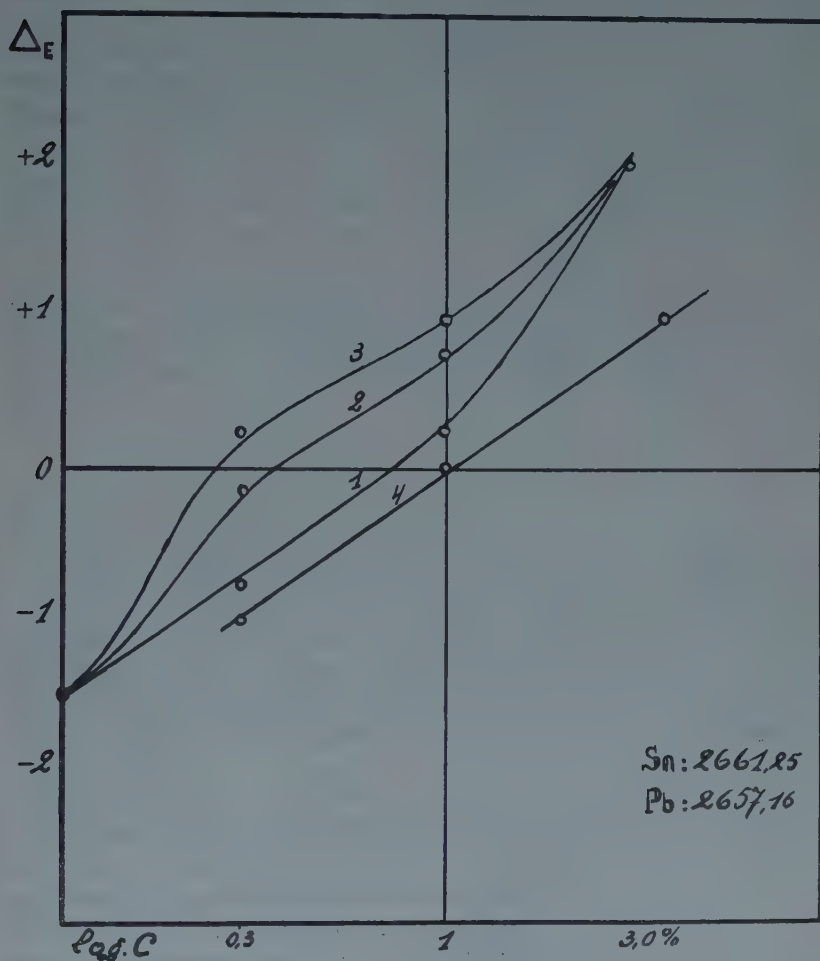


Figure 2. — DOSAGE DE L'ÉTAIN. INFLUENCE DE L'ANTIMOINE.

1°) Système binaire Pb + Sn.

» » » + 0,3 % Sb.

2°) » » » + 1,0 % Sb.

3°) » » » + 3,1 % Sb.

4°) Arc métal — /graphite + avec et sans antimoine (0,3-3 %).

1 % puis 3 % d'étain déprime nettement l'intensité relative des raies d'antimoine.

A 1,0 % d'antimoine l'influence des fortes doses d'étain est un peu moindre.

On obtient ainsi les courbes 2 et 3 de la figure 1. La courbe correspondant à l'influence de 0,3 % d'étain est pratiquement superposée à celle du système binaire (courbe 1).

On constate donc une diminution progressive de la pente de la courbe de dosage de l'antimoine par addition de doses croissantes d'étain. L'effet est nul à 0,3 % Sb et en dessous (1), il est très intense à 3 % Sb. Pour que l'influence de l'étain apparaisse, il faut que la teneur soit supérieure à 0,3 % Sn.

L'influence de 3 % d'étain sur les raies de l'antimoine à 3 % est telle que l'intensité apparente est diminuée 2,5 fois, ce qui correspond à un décalage d'un échelon.

Si on utilisait pour le dosage de l'antimoine en présence de 3 % d'étain, la courbe établie pour le système binaire Pb-Sb (courbe n° 1) on trouverait par exemple pour l'échantillon n° 9 une teneur en antimoine de 1,5 % au lieu de 3,0 %.

INFLUENCE DE L'ANTIMOINE SUR LE DOSAGE DE L'ÉTAIN.

On a ajouté aux divers alliages plomb-étain des doses d'antimoine correspondant à 0,3, 1, 3,1 parts Sb pour cent parts Pb + Sn.

Contrairement à ce qui est observé pour le dosage de l'antimoine, il n'y a guère de changements aux fortes teneurs en étain; par contre dans les échantillons à 1,0 % et à 0,3 % d'étain, l'antimoine provoque une exaltation importante de l'intensité apparente des raies d'étain. Ici, comme dans le premier cas, l'influence de 0,3 % d'antimoine est pratiquement sans effet, mais des doses de 1 et 3 % agissent intensément.

Outre les alliages à 3,0 %, 1,0 % et 0,3 % d'étain, nous avons encore contrôlé l'influence de l'antimoine sur des échantillons à teneur plus réduite: 0,1 % et 0,01 % Sn. On fait la constatation curieuse que l'influence si marquée de l'antimoine à 0,3 % d'étain a pratiquement disparu à 0,1 % et en dessous. Dans cette région les courbes de dosage ne sont donc pas influencées par Sb.

On obtient ainsi des courbes en fuseau très peu favorables pour le dosage (fig. 2).

(1) En dessous de 0,3 % d'antimoine, il y a lieu d'utiliser d'autres paires homologues que Sb 3232,52-Pb 3240,20.

Il est vraisemblable que les courbes de la fig. 1 vont également se rejoindre à un pourcentage plus élevé en antimoine, la différence essentielle entre les courbes analytiques de Sn et Sb étant la position sur l'échelle de concentration du maximum de renflement.

De nouvelles recherches sont en cours pour établir avec plus de précision les divers points des courbes de la figure 2 en opérant d'une part sur des échantillons de composition plus serrée et d'autre part par le contrôle photométrique des densités.

Nous rassemblons, par ailleurs, des données expérimentales sur d'autres alliages ternaires à base de plomb en accouplant tantôt des éléments de volatilité, tantôt de potentiel d'ionisation rapprochés ou écartés dans l'espoir de saisir les lois de l'action réciproque des impuretés.

On peut signaler les points suivants déjà acquis :

Les courbes de dosage du *bismuth* depuis 0,01 jusqu'à 0,1 % ne sont pas influencées par 0,3 % ni 3 % d'étain, 0,3 % ni 3 % d'antimoine, ni même par 3 % Sn + 3 % Sb simultanément présents.

Les courbes de dosage de l'*indium*, entre 0,03 % et 0,3 %, ne sont pas influencées par 0,3 % ni 1 % d'étain, 0,3 % ni 1 % d'antimoine, 0,3 % Sn + 0,3 % Sb, ni 1 % Sn + 1 % Sb.

Les courbes de dosage de l'*argent*, du *cuivre* et du *cadmium* en dessous de 0,01 % ne sont pas influencées par 0,3 % ni 3 % Sn et Sb séparément ni ensemble.

Le dosage de l'*arsenic* est influencé par l'antimoine qui l'exalte fortement, mais la présence simultanée d'étain diminue cet effet.

D'autres facteurs que la composition même des alliages font sentir leurs effets. Ainsi la longueur de l'arc et partant, pour une intensité donnée, la chute de potentiel entre les électrodes influencent les résultats. Nous avons maintenu le voltage à 25 Volts dans toutes les mesures.

D'autre part des expériences menées par l'un de nous et C. Weyn (voir ces *Annales*, p. 306) ont montré que les effets réciproques des constituants sont manifestement localisés au voisinage de l'anode.

L'ARC MÉTAL-GRAPHITE.

Étudiant l'intensité des raies, point par point, d'une extrémité de l'arc à l'autre, on constate que près de la cathode la présence d'un troisième constituant ne modifie pas l'intensité relative des deux premiers. L'émission de lumière par chaque espèce atomique y est liée directement à la concentration dans l'électrode. A un rapport

Sn/Pb constant dans l'électrode, correspond une intensité relative constante des raies dans cette région de l'arc.

Au voisinage de l'anode, au contraire, on voit apparaître des exaltations de raies ou des dépressions, aussi bien pour les raies du constituant de base que pour celles des impuretés.

On peut décomposer le phénomène en considérant d'une part un arc entre une électrode métallique, jouant rôle de cathode, et une anode en graphite, d'autre part une cathode en graphite combinée avec une anode métallique. Le comportement des raies est très différent d'un cas à l'autre.

Lorsque l'alliage fonctionne comme anode, l'action réciproque des constituants secondaires est intense, mais elle disparaît pratiquement si l'alliage est cathode.

Pour avoir un arc plomb-graphite stable, il y a lieu de tailler l'électrode de graphite de façon qu'elle présente une surface plane assez grande. Nous utilisons des tiges de 10 mm de diamètre, taillées perpendiculairement à la longueur. On oppose la surface de graphite à celle de l'alliage de plomb à 2,5-3 mm de distance. Dans ces conditions, l'arc peut se déplacer régulièrement sur la surface de plomb sans tendre à s'allonger comme c'est le cas si l'on utilise une électrode de graphite taillée en pointe.

L'électrode de plomb est toujours placée en dessous. On allume l'arc en approchant l'électrode de graphite de façon à la mettre momentanément en contact avec le métal. On l'écarte ensuite jusqu'à avoir une chute de potentiel de 25 volts sous 1 ampère, valeurs que l'on maintient constantes pendant la durée de l'enregistrement (1).

Considérons successivement les deux cas :

1^o) *Le métal forme l'anode.*

Dans ce cas, les effets de l'étain sur le dosage de l'antimoine et réciproquement sont très marqués comme il ressort des courbes de dosage des figures 3 et 4.

On voit que par addition d'étain aux alliages plomb-antimoine l'intensité de la raie Sb 3232,52 par rapport à la raie du plomb 3240,20 est diminuée et ce d'autant plus fortement que la dose d'étain est plus grande. Les courbes sont plus ou moins parallèles dans le domaine

(1) A longueur d'arc égale, le potentiel diffère selon que le métal forme l'anode ou la cathode de l'arc. La chute de potentiel est plus faible (densité de vapeur plus grande) avec le métal comme cathode.

La durée d'enregistrement est la même que pour l'arc entre deux électrodes métalliques : trois minutes.

de concentration examiné. Il y a lieu d'utiliser pour le dosage de l'antimoine une courbe différente, suivant la dose d'étain simultanément présente.

La même constatation est faite à propos du dosage de l'étain et de l'influence de l'antimoine dans ce cas. Ici, l'intensité relative de la

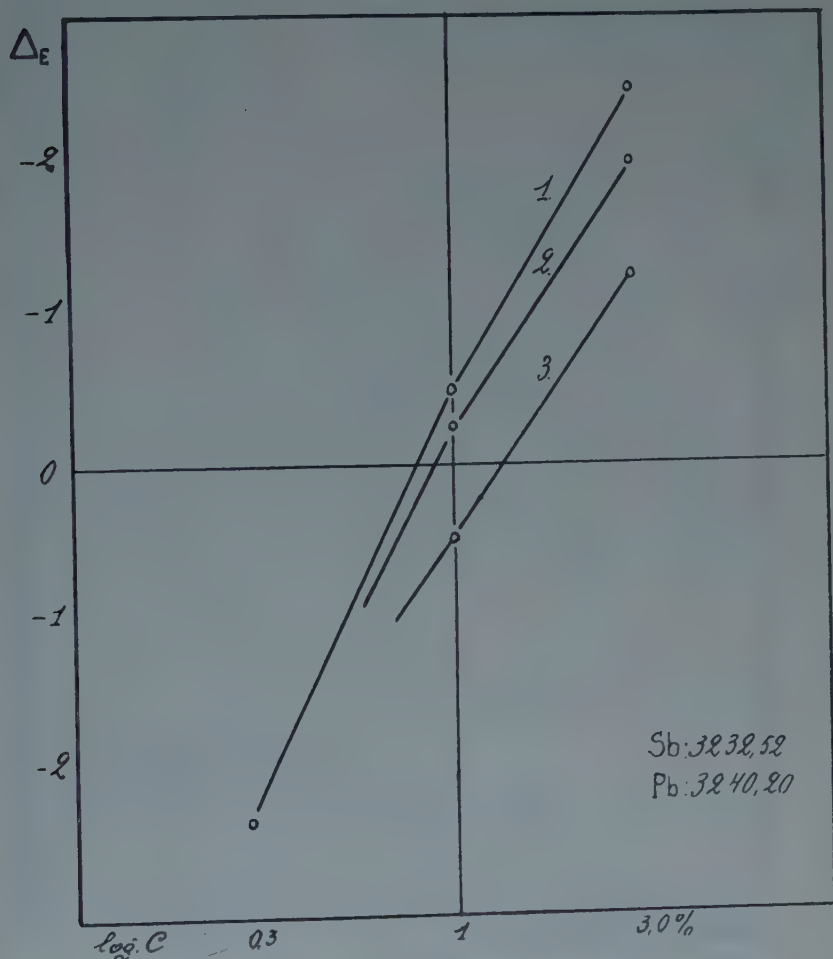


Figure 3. — DOSAGE DE L'ANTIMOINE. INFLUENCE DE L'ÉTAIN
ARC MÉTAL + /GRAPHITE —.

- 1^o) Système binaire Pb + Sb + 0,3 % Sn.
- 2^o) " " " + 1,0 Sn.
- 3^o) " " " + 3,1 Sn.

raie d'étain est exaltée par rapport à la raie de comparaison du plomb et ce d'autant plus qu'il y a plus d'antimoine.

La distance des électrodes influence de façon appréciable les résultats ci-dessus. Les influences réciproques sont beaucoup plus marquées avec un arc de 4 mm de longueur qu'avec un arc de 1,5 mm.

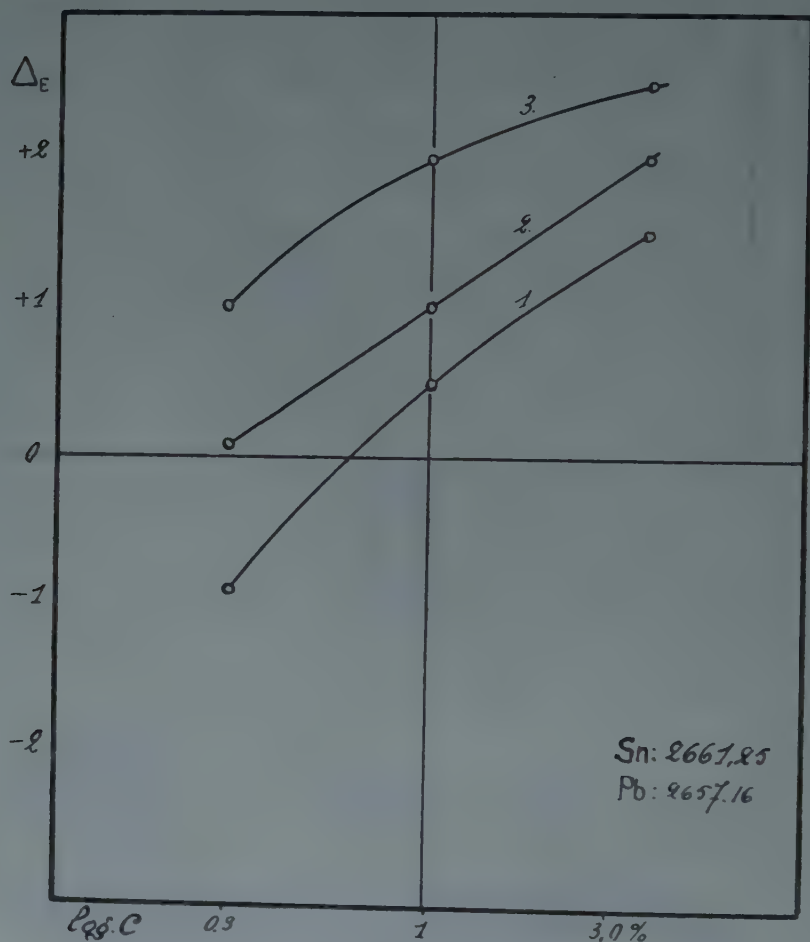


Figure 4. — DOSAGE DE L'ÉTAIN. INFLUENCE DE L'ANTIMOINE.
ARC MÉTAL + /GRAPHITE —.

1^o) Système binaire Pb + Sn.

- | | | | | |
|------------------|---|---|---|-------------|
| 2 ^o) | " | " | " | + 0,3 % Sb. |
| 3 ^o) | " | " | " | + 1,0 % Sb. |
| | " | " | " | + 3,1 % Sb. |

2°) *Le métal forme la cathode.*

Dans ce cas les résultats sont très différents. On fait la constatation, extrêmement intéressante au point de vue de l'application pratique, que les courbes des systèmes binaires ne sont pas influencées par l'addition du troisième constituant.

Les courbes analytiques établies avec un arc entre métal (cathode) et graphite (anode) ne se superposent pas à celles obtenues par enregistrement de l'arc entre deux électrodes de métal; ce sont les courbes 4 des figures 1 et 2.

Dans le cas de l'antimoine l'intensité apparente de la raie Sb 3232,52 est 2 à 2,5 fois plus faible. Pour Sn le décalage est un peu moins fort.

Il n'est pas étonnant que les courbes de dosages obtenues par deux techniques aussi différentes ne coïncident pas en valeur absolue. Mais ce qui est important et particulièrement heureux, c'est que la courbe 4 de la figure 1 n'est pas influencée par l'addition d'étain ni la courbe 4 de la figure 2 par l'addition d'antimoine.

Au lieu d'avoir des courbes séparées comme celles des figures 3 et 4, on retrouve ici la même intensité relative en présence comme en l'absence du troisième constituant.

De façon plus précise, ce sont les temps d'exposition donnant même noircissement des paires homologues qui demeurent inaltérés.

Les courbes analytiques établies aux dépens des alliages binaires Pb-Sb et Pb-Sn respectivement, sont utilisables sans modifications en présence de doses atteignant même 3 % d'étain d'une part, d'antimoine d'autre part.

Nous achevons de vérifier si la même simplification reste valable pour d'autres systèmes ternaires ainsi que dans le cas de la présence simultanée d'un nombre plus élevé de constituants comme cela se présente dans le plomb d'œuvre.

Il est intéressant de signaler que les bandes du carbone sont peu marquées dans l'arc graphite-métal (cathode). Les impuretés du graphite ne jouent pratiquement aucun rôle.

Dans l'arc graphite-métal (anode), les bandes du carbone sont sensiblement plus intenses.

*Université de Louvain,
Laboratoire de Chimie Analytique.*

EFFETS DE POLARITÉ DANS L'ARC ÉLECTRIQUE

par R. BRECKPOT et C. WEYN

Il a déjà été montré à plusieurs reprises par l'un de nous que c'est à l'anode qu'apparaissent dans l'arc électrique les phénomènes liés à la tension de vapeur des éléments en présence (distillation fractionnée) et à leur potentiel d'ionisation (exaltation sélective). (1).

On le constate aisément si l'on établit l'arc non pas entre deux électrodes métalliques, mais entre une électrode du métal à analyser et une électrode de graphite. L'effet est plus intense encore lorsque le métal est remplacé par l'oxyde comme dans la technique appliquée régulièrement dans ce laboratoire pour l'analyse du cuivre, du fer, du zinc, du cobalt. L'oxyde est placé dans ce cas sur une seconde électrode de graphite (inférieure) taillée en cuvette, l'autre électrode de graphite étant généralement taillée en pointe. L'arc s'établit entre cette pointe et l'oxyde.

Lorsque l'oxyde forme l'anode on observe, dans le cas des oxydes de cuivre, fer et cobalt, une distillation fractionnée très nette des éléments les plus volatils. La distillation n'apparaît guère, ou est beaucoup plus réduite, quand l'oxyde joue le rôle de cathode.

Dans le cas de l'oxyde de zinc, qui ne fond pas dans l'arc comme les précédents, on met en évidence sur anode une exaltation des impuretés dont le potentiel d'ionisation est plus petit que celui du métal de base.

On pouvait se demander si l'action réciproque des impuretés, qui apparaît de façon si intense à l'enregistrement dans l'arc des plombs d'œuvre, ne serait pas également localisée dans la région anodique.

Parallèlement aux essais décrits par ailleurs dans ce même numéro des *Annales* (p. 295), nous avons entrepris une étude de l'alliage ternaire plomb-antimoine-étain au point de vue du comportement des raies d'une extrémité à l'autre de l'arc.

A cet effet, on a formé l'image de l'arc sur la fente du spectrographe et analysé photométriquement de place en place les raies stigmatiques ainsi obtenues.

La mise au point de l'image sur la fente ne peut être faite visuellement. On a calculé la distance : source-lentille et lentille-fente de

(1) R. BRECKPOT. — *Chimie et Industrie*, **31**, 220, 1934; *Natuurw. Tydschrift*, **18**, 173, 1936; ces *Annales*, **56**, B, 384, 1936.

façon à réaliser cette mise au point dans la région 2600-2700 Å où l'on se proposait de faire les mesures (1).

L'exposition devant être assez courte (environ 2 secondes), on a introduit sur le trajet des rayons un secteur tournant, d'angle au centre de 36° , afin de pouvoir prolonger la durée d'enregistrement pendant 20 secondes. Le support d'arc est déplacé rapidement dans le sens perpendiculaire à l'axe optique, afin de promener continuellement l'image à travers la fente et d'éviter ainsi de ne prendre qu'une tranche dans l'arc. La hauteur de l'arc est évidemment maintenue constante.

Nous avons étudié l'arc entre électrodes de plomb et celui entre une électrode de plomb et une seconde électrode de graphite. Dans les deux cas il y a lieu de prendre des pièces massives de plomb pour éviter la fusion, et de les tailler de façon qu'elles présentent une surface-plane assez grande (2 à 3 cm²).

L'arc en effet ne tient pas sur le plomb dès que celui-ci est oxydé. L'arc tend ainsi à se déplacer continuellement vers du métal frais, balayant progressivement toute la surface disponible.

Lorsqu'on veut opposer une électrode de graphite à une électrode de plomb, il y a lieu d'achever également l'électrode de graphite par une surface plane. L'arc se déplace régulièrement entre les deux surfaces sans s'allonger; il n'en serait pas de même avec une électrode de graphite taillée en pointe.

Cette disposition des électrodes a évidemment comme conséquence; excepté dans le cas où l'arc s'accroche sur les bords, ce qu'on évite, de provoquer un effet d'écran. La lumière émise au voisinage immédiat des électrodes n'est pas reprise par la lentille et n'atteint pas le spectrographe.

Le rayonnement étudié se situe d'un pôle à l'autre mais à l'exclusion du voisinage immédiat de ceux-ci.

Il y a lieu d'ajouter que la lumière reçue par un élément de fente de longueur très petite l trouve son origine à l'intérieur d'un cylindre de hauteur correspondante et de diamètre d , d étant l'épaisseur de l'arc.

On enregistre ainsi en l des vibrations qui ont subi des parcours très différents à travers la zone chargée de particules émettrices et le cylindre de vapeur obscure qui l'entoure.

(1) Il est facile de contrôler l'exactitude de la mise au point en formant sur la fente une image très petite, comme celle d'un arc entre électrodes cylindriques de cuivre ou de fer, dont les extrémités sont taillées en plan perpendiculaire à l'axe des tiges et rapprochées à 0,5 mm environ. Les raies présentent une longueur minimum dans la région pour laquelle la mise au point est réalisée.

Chaque intensité lumineuse monochromatique que le spectrographe décèle en l est évidemment une résultante de cet ensemble complexe. Néanmoins, à condition de fixer les circonstances de l'enregistrement telles que l'ampérage et le voltage (qui établit par le fait même la longueur de l'arc), on obtient des résultats dont la reproduction est fort satisfaisante.

S'il ne nous est pas possible pour l'instant de les interpréter quantitativement, on a pu mettre cependant en évidence qualitativement les modifications profondes accompagnant dans certains cas l'introduction d'un troisième constituant.

L'étude photométrique des spectres stigmatiques obtenus a été menée à l'aide d'un photomètre à lecture directe (1).

L'image de la raie étudiée est projetée, agrandie 40 fois sur la fente de la cellule photoélectrique. Celle-ci était réglée à 1 mm. d'ouverture et 20 mm. de longueur. On photomètre les raies de 0,5 en 0,5 mm (sur la plaque) à partir du centre en annotant chaque fois la déviation galvanométrique.

Le courant alimentant la source lumineuse venait d'une batterie de forte capacité et était rigoureusement constant.

Les plaques utilisées étaient Gevaert Superchromosa 2000 H & D. Malgré le grain assez grossier, les résultats étaient satisfaisants. Les plaques étaient développées de façon à obtenir une valeur de γ égale à l'unité dans la région de 2600 à 2700 Å (2).

Un développement de 3 minutes à 18° avec le développeur à base de métol et hydroquinone dont la composition est donnée en note (3) a donné des valeurs de γ égales à 1 et constantes, à moins de 5 % près (4).

Dans ces conditions il est inutile de recalculer les valeurs galvanométriques en densité. Nous avons porté le logarithme de la déviation ($\log \Delta$) en ordonnée dans les diagrammes. Les courbes exprimées en densité seraient simplement inversées, la densité étant donnée par l'expression $D = \log \Delta_0 / \Delta$ ou Δ_0 et Δ sont les déviations galvano-

(1) Nous tenons à exprimer notre reconnaissance au Fonds National de la Recherche Scientifique pour les prêts d'instruments dont notre laboratoire a bénéficié.

(2) Avec les plaques utilisées γ est sensiblement constant de 2400 à 3800 Å.

(3) Composition du développeur : métol 1 gr, hydroquinone 4 grs, KBr 1 gr, Na CO₃ crist. 50 grs, sulfite de sodium 75 gr, portés au volume de 1 litre.

(4) Il y a lieu de noter que γ a été mesuré à l'aide d'un diagramme temps et non intensité, c'est-à-dire, en imprimant sur chaque plaque un spectre dégradé par secteur tournant à échelons.

métriques respectivement pour le voile de la plaque, qui est constant, et pour la raie.

Un déplacement vers le bas du diagramme signifie une diminution de transparence, c'est-à-dire une augmentation de la densité ou de l'intensité. La hauteur totale du diagramme correspond à une variation de Δ de 1 à 100.

La distance séparant les pôles est portée en abscisse. Les points expérimentaux sont distants de 0,5 mm sur la plaque comme dans l'arc, l'image de l'arc étant reproduite sans grossissement. Chaque valeur expérimentale est à vrai dire une moyenne portant sur des segments juxtaposés de 0,5 mm de longueur.

Dans tous les diagrammes le pôle négatif est à gauche, le pôle positif à droite.

I^o) ARC MÉTAL/MÉTAL.

La figure 1 montre les variations des raies Pb 2657,16 et Sn 2661,25 dans deux échantillons de plomb, titrant 0,3 % d'étain. Le premier (diagramme gauche) ne renferme qu'une petite dose, 0,3 %, d'antimoine, le second, par contre, 3,1 parts Sb par 100 parts d'alliage Pb-Sn.

Le diagramme gauche est analogue à celui que donnerait le mélange binaire plomb-étain. Les raies du plomb et de l'étain ont sensiblement la même allure et passent par un minimum vers le milieu de l'arc.

Le diagramme de droite de la figure 1 met en évidence l'influence de la forte dose d'antimoine.

L'allure de la raie Pb 2657,16 demeure inchangée. Il en est de même pour la raie de l'étain au voisinage immédiat de la cathode, mais près de l'anode le changement est radical. Au lieu d'être moins intense que celle du plomb, la raie de l'étain y devient beaucoup plus intense. Les deux courbes se croisent, ce qui correspond à l'égalité d'intensité à cet endroit de l'arc.

L'intensité relative Sn/Pb est pratiquement constante dans le premier cas; elle augmente rapidement de la cathode vers l'anode dans le second cas (1).

L'intensité relative moyenne que l'on peut établir graphiquement à l'aide des courbes est 3,6 fois plus grande dans le second cas. Ceci correspond à l'exaltation très nette constatée par ailleurs en présence

(1) Intensités « apparentes » vu l'emploi d'un secteur *temps* pour l'étalonnage de la plaque.

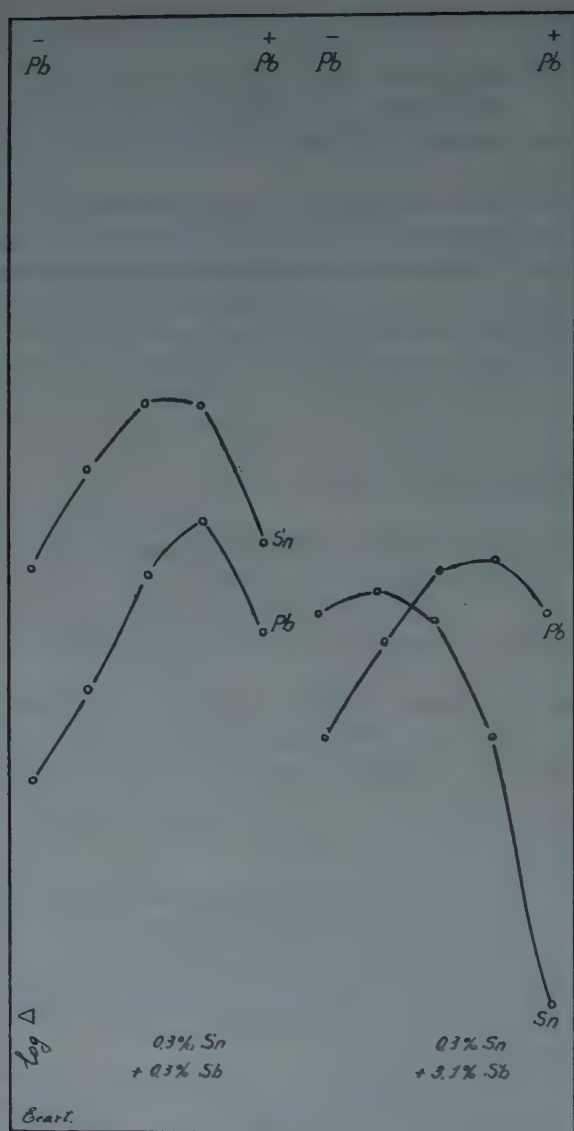


Figure 1. — ARC MÉTAL/MÉTAL. INFLUENCE DE L'ANTIMOINE SUR L'ÉTAIN A 0,3 %.

Composition des échantillons :

- 1) Pb 99,7; Sn 0,3; Sb 0,3 grs.
- 2) Pb 99,7; Sn 0,3; Sb 3,1 grs.

d'une forte dose d'antimoine à l'enregistrement global de la lumière émise par l'arc (1).

Il y a lieu de retenir surtout de la figure 1 la différence marquée que l'on observe entre les régions cathodiques et anodiques. Ce même phénomène se retrouve si l'on compare les échantillons ayant le même titre d'antimoine, mais où l'on ajoute des doses différentes d'étain.

Tout se passe comme si, à la cathode, la substance est projetée de façon homogène dans l'espace d'arc et que, dans la région avoisinant cette électrode, l'émission de chaque espèce atomique est proportionnelle à la concentration.

Au fur et à mesure qu'on s'approche de l'anode s'établissent des équilibres d'origine thermique ou électrique qui apportent des perturbations complexes dans le mécanisme d'émission. La volatilisation du métal à l'anode est la conséquence de l'échauffement provoqué par le bombardement électronique, d'où les effets de distillation fractionnée qui sont particulièrement nets lorsque la masse de métal est petite, par exemple une bille de 0,1-0,2 grammes placée sur un support de graphite.

Cette différence entre anode et cathode se retrouve encore dans la façon dont l'une et l'autre électrode sont attaquées par l'arc. L'anode massive de plomb n'est atteinte que très superficiellement, tandis que la cathode est littéralement creusée en cratères qui se remplissent d'oxyde fondu. Dès qu'un cratère est creusé, l'arc, rejeté par l'oxyde, mauvais conducteur, s'attaque à la région voisine.

La perte de poids est également beaucoup plus importante du côté cathode que du côté anode (2).

Il est curieux de constater que si l'on remplace l'arc entre deux électrodes de plomb par un arc entre une électrode de plomb et une autre de graphite, on peut retrouver exactement les mêmes phénomènes mais séparés.

L'électrode de graphite n'apporte, semble-t-il, aucune perturbation. On retrouve d'une part (métal — /graphite +) l'équivalent de la région cathodique de l'arc primitif, d'autre part (métal + /graphite —) l'équivalent de la région anodique.

Cette décomposition du phénomène par la réalisation successive

(1) Voir la communication avec MM. Creffier et Perlinghi, en particulier a figure 2, p. 299. Dans ce cas, l'exaltation de la raie Sn 2661,25 est de 2,5. Les valeurs données par les deux méthodes ne sont pas directement comparables vu les différences dans les conditions d'enregistrement.

(2) Ainsi une bille de cuivre de 250 milligr. est presque complètement volatilisée en 20 minutes sur cathode de graphite, tandis que sur anode la perte de poids n'est que d'une quinzaine de milligrammes.

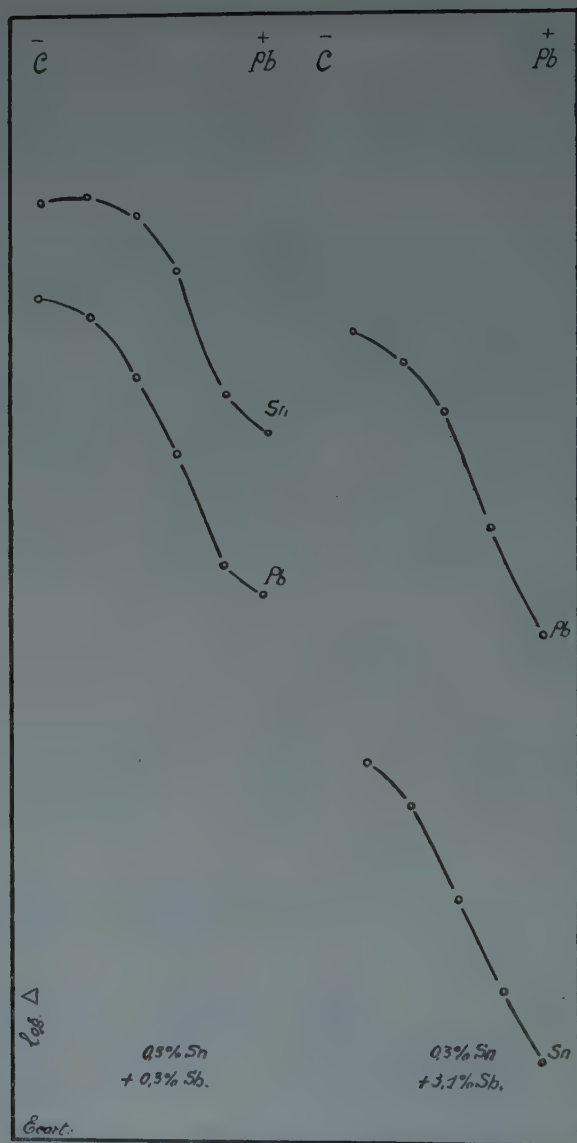


Figure 2. — ARC MÉTAL + /GRAPHITE—. INFLUENCE DE L'ANTIMOINE SUR L'ÉTAIN A 0,3 %.

Composition des échantillons :

- 1) Pb 99,7; Sn 0,3; Sb 0,3 grs.
- 2) Pb 99,7; Sn 0,3; Sb 3,1 grs.

des deux combinaisons métal-graphite a permis d'en simplifier l'étude. La neutralité apparente du graphite est due sans doute à son potentiel d'ionisation élevé (11,2 volts). On retrouve évidemment du carbone dans l'espace d'arc, accusé par la raie 2478,6 et les bandes du cyano-gène. Celles-ci sont relativement plus importantes lorsque le graphite est cathode que lorsqu'il est anode.

Goldschmidt, Mannkopff et Peters (1), ont montré que l'intensité spectrale des éléments est de 10 à 100 fois plus forte dans une zone très proche de la cathode (Glimmschicht). Cette exaltation est interprétée comme étant due à la migration des ions métalliques vers la cathode et cela en nombre d'autant plus grand que le potentiel d'ionisation est plus petit.

Cet effet, très net lorsqu'on opère sur de très petites quantités de matières, 1-3 mgrs. placées sur support de charbon, disparaît lorsqu'on opère sur des doses massives de substance comme c'est le cas dans les essais menés par nous.

Nous ne retrouvons donc pas l'exaltation en question. Il est probable qu'elle apparaît tout près de la cathode de graphite dans le cas de la combinaison métal + /graphite —, puisque du plomb volatilisé va se déposer à l'état d'oxyde sur cette dernière électrode (2). Par suite du rôle d'écran, joué par les bords de l'électrode de graphite taillée à plat, cette région n'apparaît pas dans les spectres.

II^o) ARC MÉTAL + /GRAPHITE —.

La figure 2 nous montre, étendue sur tout l'espace d'arc analysé, une disposition de raies rappelant celle existant au voisinage de l'anode dans la figure 1.

On y voit, passant de l'échantillon à faible teneur en antimoine à celui qui en renferme 3 %, le déplacement important subi par la raie de l'étain 2661,25. Moins intense que le plomb dans l'alliage binaire comme en présence d'une faible quantité d'antimoine (0,3 %), elle devient beaucoup plus intense en présence d'une forte dose de cet élément (3,1 %).

En fait cette exaltation de l'étain n'est qu'apparente; c'est effectivement la raie de comparaison du plomb qui diminue d'intensité. Ceci

(1) *Zeitschr. f. Physik*, **70**, 444, 1931.

(2) Nous avons toujours placé l'électrode de métal en dessous de l'électrode de graphite.

Si l'on place le métal au-dessus, on se heurte à des difficultés lorsque ce métal est cathode; l'oxyde de plomb formé se rassemble en gouttes qui s'affaissent sur le pôle inférieur, venant obturer l'espace d'arc.

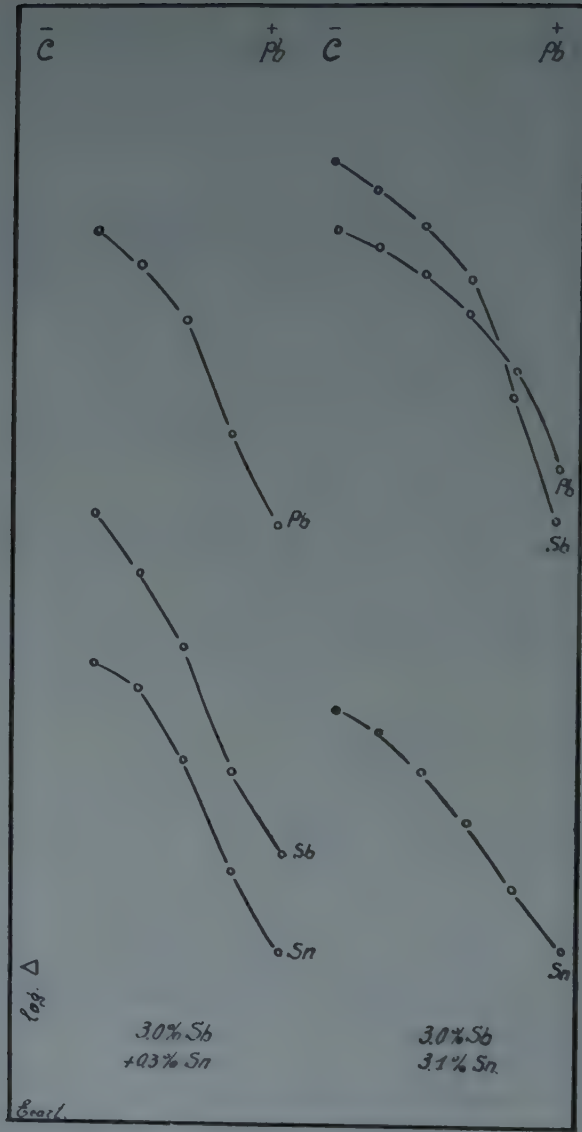


Figure 3. — ARC MÉTAL + /GRAPHITE —. INFLUENCE DE L'ÉTAİN SUR L'ANTI-MOINE A 3,0 %.

Composition des échantillons :

- 1) Pb 97,0; Sb 3,0; Sn 0,3 grs.
- 2) Pb 97,0; Sb 3,0; Sn 3,1 grs.

n'apparaît pas à l'examen de la figure 2 où il ne faut pas chercher à comparer les valeurs absolues des deux spectres gauche et droit.

Vu les difficultés à l'enregistrement, il n'est pas possible de reproduire les spectres avec la même intensité absolue.

Cette dépression du plomb apparaît nettement si on compare deux spectres quantitatifs, c'est-à-dire des spectres pris avec trois minutes d'enregistrement, image sur collimatrice et non sur la fente. De tels spectres sont pris sur une même plaque et sont comparables en première approximation du point de vue de la densité absolue des raies.

L'intensité de la raie Pb 2657,16 est approximativement diminuée de moitié quand on passe d'un échantillon sans antimoine à celui qui en contient 3 %. (arc métal + /graphite —, 25 volts, 1 ampère, 3 minutes).

La figure 3 met en évidence la diminution importante subie par la raie de l'antimoine par addition d'une forte dose d'étain. Comme il résulte du travail avec MM. Creffier et Perlinghi, c'est aux forts pourcentages d'antimoine que cette influence de l'étain se fait surtout sentir. C'est donc dans ce cas que nous avons analysé les spectres.

On remarquera que la raie d'étain 2661,25 garde la même valeur relative vis-à-vis de la raie du plomb 2657,16 dans les deux spectres, alors que la teneur en étain passe de 0,3 à 3 %. Il ne s'agit pas dans ce cas d'une dépréciation du plomb, car celui-ci reste constant en première approximation, en se basant sur l'intensité des raies du plomb dans les spectres quantitatifs de 3 minutes d'enregistrement.

Il s'agit donc d'une diminution simultanée du pouvoir émissif de l'antimoine et de l'étain, comme si les deux éléments se neutralisaient.

Combinant les effets réciproques des trois constituants de l'alliage Pb-Sb-Sn, on peut résumer :

L'addition d'un fort pourcentage d'antimoine déprime le plomb, l'addition subséquente d'étain déprime à son tour l'antimoine. L'étain est influencé comme suit par une forte dose d'antimoine. En dessous de 0,1% Sn, les raies de l'étain subissent le même affaiblissement que les raies du plomb; entre 0,1 et 0,3 % Sn la dépression de l'étain est moindre que celle du plomb, ce qui a comme effet une exaltation apparente de ce métal, puis au-dessus de 0,3% Sn on a l'effet de neutralisation réciproque de l'étain et de l'antimoine signalé plus haut.

Cette description des phénomènes rend bien compte de l'allure particulière des diverses courbes décrites dans la communication avec MM. Creffier et Perlinghi, et notamment des courbes en fuseau de la figure 2 (p. 299).

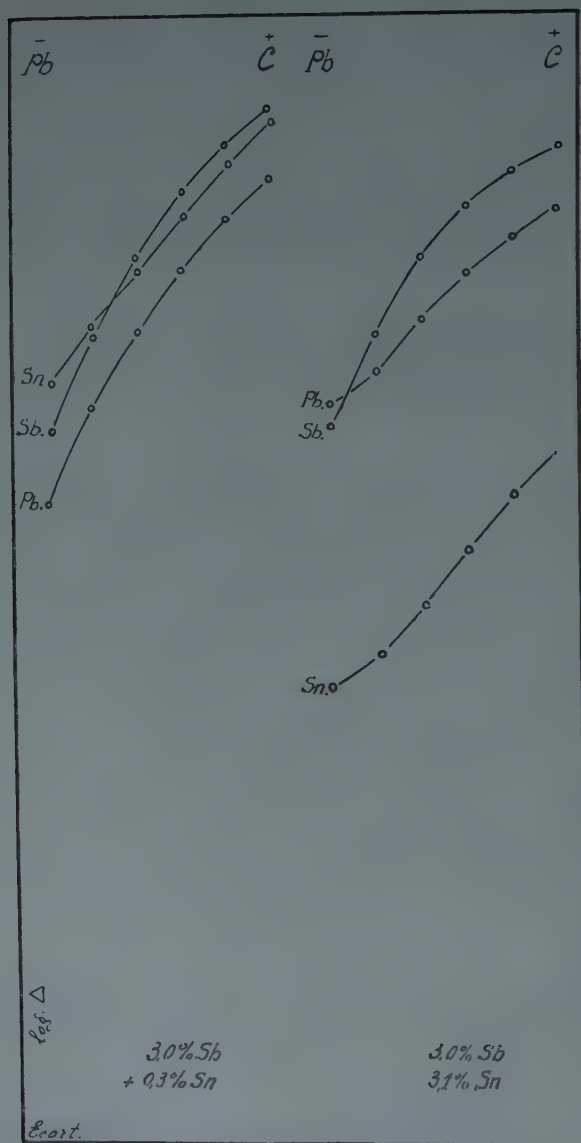


Figure 4. — ARC MÉTAL — /GRAPHITE +. INFLUENCE DE L'ÉTAIN SUR L'ANTI-MOINE A 3,0 %.

Composition des échantillons :

- 1) Pb 97,0; Sb 3,0; Sn 0,3 grs.
- 2) Pb 97,0; Sb 3,0; Sn 3,1 grs.

III^o) ARC MÉTAL — /GRAPHITE +.

La figure 4 montre, par opposition avec la figure 3, combien les résultats sont différents lorsque le métal forme la cathode.

Le déplacement de la raie d'antimoine par rapport à la raie du plomb est à peine marqué. La raie d'étain, également, se comporte normalement; faible dans le spectre de gauche, correspondant à 0,3 % Sn, elle occupe sa place normale, vis-à-vis du plomb, dans le spectre de droite correspondant à 3 % Sn.

On fait la même constatation à l'analyse locale des échantillons de la figure 2, si l'on y inverse la polarité des électrodes. Dans ce cas la raie de l'étain ne change guère de valeur par rapport à celle du plomb.

Ainsi s'explique qu'à l'enregistrement quantitatif, dans les conditions métal — /graphite +, on obtient pour les mélanges ternaires les mêmes résultats que pour les mélanges binaires. Les effets réciproques des impuretés n'apparaissent pas, ou sont très atténués dans ces conditions.

Il y a lieu de remarquer, en terminant, que l'allure des diverses courbes étudiées est fortement influencée par des variations de la longueur de l'arc. Toutes nos mesures se rapportent à un arc de 3,25 mm.

Dans un arc très court, les variations dont il est fait état ci-dessus sont atténuées; elles s'exagèrent avec l'ouverture de l'arc, pour tendre néanmoins vers des valeurs en palier. Dans la colonne positive d'un arc suffisamment long, un équilibre tend à s'établir entre les divers atomes émetteurs.

*Université de Louvain,
Laboratoire de Chimie Analytique.*

TABLE DES MATIÈRES

Tome 57, série I

	PAGES
Session du 28 janvier 1937, à Bruxelles	5
PREMIÈRE SECTION : Mathématiques.	
Fonctions moyenne-périodiques sur un groupe abstrait, par M. J. Delsarte	6
Sur les sphères de S. Roberts, par M. V. Thébault	16
DEUXIÈME SECTION : Physique et Chimie.	
Sur la radioactivation de l'argent par les neutrons, par M. G. Guében	22
La structure moléculaire du silicobromoforme, par MM. J. Wouters, M. de Hemptinne et P. Capron	25
Calcul des modes fondamentaux plans de vibration des molécules C_2H_4 , C_2D_4 et $C_2H_2D_2$, par MM. A. Verleysen et C. Manneback	31
La pénétration par imbibition des matières colorantes et des granules colloïdaux à travers les corps poreux, par M. A. Boutaric	39
Session du 15 avril 1937, à Bruxelles.	
PREMIÈRE SECTION : Mathématiques.	
Cercles et sphères associés au triangle et au tétraèdre, par M. V. Thébault	53
Sur l'application des déterminants supérieurs à la résolution de certains systèmes d'équations linéaires, par M. N. P. Sokoloff	54
Sur les équations de la diffusion thermique par turbulence, par M. J. Kampé de Fériet	60
Théorie du mouvement gyroscopique des projectiles. Le mouvement gyroscopique élémentaire. Essai d'interprétation physique, par M. R. d'Adhémar	67
DEUXIÈME SECTION : Chimie et Physique.	
Le mécanisme secondaire de la décomposition photo-chimique de l'ammoniac. I. l'inhibition par l'hydrogène atomique, par MM. W. Mund et A. Van Tiggelen	73
Les récentes conceptions théoriques sur la lumière, par M. Louis de Broglie	91
Calcul des fréquences et modes de vibration de la molécule de monodeutéroéthylène, par MM. G. Lemaître, C. Manneback et Y. I. Tchang	92
Erratum	99
	120
	128

L'analyse spectrale quantitative du plomb, de l'étain et du cobalt, par M. R. Breckpot	129
Erratum	140

Session du 28 octobre 1937, à Louvain.

PREMIÈRE SECTION : Mathématiques	141
Sur une solution particulière de l'équation $\Delta_3 U = 0$, par M. P. Humbert	142
Sur la géométrie du triangle et du tétraèdre, par M. V. Thébault	145
Tétraèdres et sphères de Roberts, par M. P. Delens	155
Sur l'interprétation d'Eddington de l'équation de Dirac, par M. G. Lemaître	165
Théorie du mouvement gyroscopique des projectiles. Le mouvement gyroscopique élémentaire. Essais d'interprétation physique, par M. R. d'Adhémar	173
Les observations d'équinoxes et de solstices dans le chap. 1 du livre 3 du Commentaire sur l'Almageste par Théon d'Alexandrie, 1 ^{re} partie, par M. A. Rome	213
DEUXIÈME SECTION : Physique et Chimie	237
Désintégration et radioactivation artificielles, par M. G. Guében	238
Sur la dépolarisation de la lumière transmise par les solutions colloïdales, par MM. A. Boutaric et L. Bernard	284
Le dosage spectrographique du niobium et du tantale, par MM. R. Breckpot et J. Creffier	290
Étude spectrographique d'alliages ternaires à base de plomb, par MM. R. Breckpot, J. Creffier et O. Perlinghi	295
Effets de polarité dans l'arc électrique, par MM. R. Breckpot et C. Weyn	306
Table des Matières	318

AUTEURS

R. d'Adhémar : 73, 173. — L. Bernard : 284. — A. Boutaric : 39, 284. —
R. Breckpot : 129, 290, 295, 306. — L. de Broglie : 99. — P. Capron : 25.
— J. Creffier : 290, 295. — P. Delens : 155. — J. Delsarte : 6. — G. Guében :
22, 238. — M. de Hemptinne : 25. — P. Humbert : 142. — J. Kampé de Fériet :
67. — G. Lemaître : 120, 165. — C. Manneback : 31, 120. — W. Mund : 92.
— O. Perlinghi : 295. — A. Rome : 213. — N. P. Sokoloff : 60. — Y. L. Tchang :
120. — V. Thébault : 16, 54, 145. — A. Van Tiggelen : 92. — A. Verleysen :
31. — C. Weyn : 306. — J. Wouters : 26.

DATES DE PUBLICATION

1^{er} fasc. : pp. 1-52, 16 mars 1937.
2^e fasc. : pp. 53-140, 7 juin 1937.
3^e fasc. : pp. 141-319, 31 décembre 1937.



PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

EXTRAIT DU CATALOGUE

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. I à t. XLVI, 1875 à 1926. Chaque vol. in-8° de 400 à 600 pages fr. 50,00

TABLES ANALYTIQUES DES ANNALES.

t. I à XXV (1875 à 1901) fr. 10,00
t. XXVI à XLVI (1902 à 1926). fr. 20,00

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES,

Série A (sc. mathématiques), t. XLVII à t. LXI (1927 à 1936) fr. 35,00

Série B (sc. physiques et naturelles) " fr. 35,00

Série C (sc. médicales) (1927 et 1928) fr. 50,00 — (1929 à 1933) fr. 20,00
(1934 et 1936) fr. 10,00

Série D (sc. économ. et techniques) (1927 à 1929) fr. 10,00 — (1930) fr. 30,00
(1931 à 1936) fr. 50,00

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES,

t. I à XCII (1877 à 1927). Les deux volumes annuels . . . fr. 60,00

Le fascicule trimestriel fr. 17,00

t. XCIII à CXII (1928 à 1937) fr. 80,00

Le fascicule fr. 14,00

TABLES ANALYTIQUES DE LA REVUE,

t. I à L (1877 à 1901) fr. 10,00

t. LI à LXXX (1902 à 1921) fr. 10,00

t. LXXX à CX (1922 à 1937) fr. 15,00

LES PORTS ET LEUR FONCTION ÉCONOMIQUE (1906 à 1910).

Cinq volumes. Chaque volume fr. 20,00

Le premier volume est épuisé ; mais on peut en trouver les articles dans les livraisons d'avril et de juillet 1906 de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES.

MONOGRAPHIES DE SCIENCES NATURELLES

I. — **B. Tougarioff**. Les réactions organiques dans l'analyse qualitative minérale (cations). — Un vol. in-8° de 107 pages (1930) : en Belgique, fr. 12,00 ; en France, fr. fr. 12,00 ; autres pays, belgas 4,00.

II. — **F. Corin**. Le métamorphisme. Un vol. in-8° de 150 pages (1931) : en Belgique, fr. 15,00 ; en France, fr. fr. 15,00 ; autres pays, belgas 5,00.

III. — **V. Schaffers**. Le paratonnerre et ses progrès récents. Un vol. in-8° de 90 pages (1931) : en Belgique, fr. 12,00 ; en France, fr. fr. 12,00 ; autres pays, belgas 4,00.

MONOGRAPHIES MÉDICALES

I. — **J. P. Bouckaert**. La pathogénie et le traitement du diabète. Un vol. in-8° de 107 pages (1927) : en Belgique, fr. 20,00 ; en France, fr. fr. 18,00 ; autres pays, belgas 6,00. (*épuisé.*)

II. — **M. Schillings**. Le rein en fer à cheval. Un vol. in-8° de 104 pages, avec 8 planches hors texte (1928) : en Belgique, fr. 35,00 ; en France, fr. fr. 35,00 ; autres pays, belgas 11,00.

III. — **A. Lemaire**. Le problème de la sensibilité viscérale et l'anesthésie des splanchnalgies. Un vol. in-8° de 86 pages (1928) : en Belgique, fr. 18,00 ; en France, fr. fr. 18,00 ; autres pays, belgas 6,00.

IV. — **P. Van Gehuchten**. La pathologie du système pallido-strié. Un vol. in-8° de 52 pages, avec 8 planches hors texte (1930) : en Belgique, fr. 12,00 ; en France, fr. fr. 12,00 ; autres pays, belgas 4,00.

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉE PAR

LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

ASSOCIATION SANS BUT LUCRATIF

Cette revue, fondée en 1877 par la Société scientifique de Bruxelles, se compose actuellement de cinq séries : la **première série** comprend 30 volumes (1877-1891); la **deuxième**, 20 volumes (1892-1901); la **troisième**, 30 volumes (1902-1921); la **quatrième série**, 30 volumes (1922-1936). Le fascicule de janvier 1937 ouvre la **cinquième série**.

La revue paraît six fois par an depuis 1928. Chaque livraison renferme trois parties principales :

La **première partie** se compose d'Articles originaux, où sont traités les sujets les plus variés se rapportant à l'ensemble des sciences mathématiques, physiques, naturelles, sociales, etc.

La **deuxième partie** consiste en une **Revue des Revues et des Publications périodiques**.

La **troisième partie** consiste en une **Bibliographie scientifique**, analyse critique des principaux ouvrages scientifiques récemment parus.

Chaque livraison contient ordinairement aussi un ou plusieurs articles de **Variétés**.

CONDITIONS D'ABONNEMENT

L'abonnement est payable annuellement avant la fin de février. Il court jusqu'à ordre contraire.

Belgique et Grand-Duché de Luxembourg	80 francs belges
France	80 francs français
Autres pays	26 belgas

Pour tout ce qui concerne la Rédaction, s'adresser au Secrétariat de la Revue, Collège philosophique, Eegenhoven (Louvain).

Pour ce qui concerne l'Administration, s'adresser au Secrétariat de la Société scientifique, 2, rue du Manège, Louvain. Compte chèques postaux n° 202746.

Compte chèques postaux Paris, n° 110002, Société scientifique.

Louvain. — Établiss. FR. CEUTERICK, rue Vital Decoster, 66.

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

ANNALES
DE LA
SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
DE BRUXELLES

ASSOCIATION SANS BUT LUCRATIF

*Nulla unquam inter fidem et rationem
vera dissensio esse potest.*

CONST. DE FIDE CATH., c. IV.

TOME CINQUANTE-HUITIÈME, 1938

SÉRIE I

SCIENCES MATHÉMATIQUES
et PHYSIQUES

LOUVAIN

Secrétariat de la Société Scientifique de Bruxelles

2, RUE DU MANÈGE, 2

Chèques postaux : 2027.46 — Chèques postaux : Paris, 110002

1938

